Раздел 4. **Основы логики**

А3, А10 Таблицы истинности. Законы алгебры логики. Задачи, решаемые с использованием таблиц истинности

Конспект

В *алгебре логики* изучаются логические операции, производимые над *высказываниями*. Такие высказывания могут быть истинными или ложными. Применяя к простым высказываниям *логические операции*, можно строить *составные высказывания*.

Основные логические операции

- *Отрицание* (инверсия, логическое НЕ)

Смысл операции: результат меняется на противоположный (вместо истины — ложь, вместо лжи — истина).

Обозначение: ¬.

Таблица истинности:

A	¬A
0	1
1	0

- *Логическое сложение* (дизъюнкция, логическое ИЛИ)

Смысл операции: результат — истина, если хотя бы один операнд — истина (операндом называется то значение или та переменная, над которым (которой) осуществляется операция).

Обозначения: $\vee$ или +.

Таблица истинности:

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- *Логическое умножение* (конъюнкция, логическое И)

  Смысл операции: результат — истина, если оба операнда — истина.

  Обозначения: $\wedge$ или &.

  Таблица истинности:

A	**B**	**A $\wedge$ B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- *Исключающее ИЛИ* (сложение по модулю 2, строгая дизъюнкция)

  Смысл операции: результат — истина, если операнды различны.

  Обозначения: $\oplus$ или $\neq$.

  Таблица истинности:

A	**B**	**A $\oplus$ B**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- *Следование* (импликация)

  Смысл операции: из лжи может следовать что угодно, а из истины— только истина.

  Обозначение: $\rightarrow$.

  Таблица истинности:

A	**B**	**A $\rightarrow$ B**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- *Равносильность* (эквиваленция)

Смысл операции: результат — истина, если операнды одинаковы.

Обозначения: ≡ или ↔.

Таблица истинности:

A	**B**	**A ↔ B**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Если в логическом выражении используется несколько логических операций, то их порядок определяется *приоритетами логических операций:*

выражение в скобках
логическое НЕ (инверсия),
логическое И (конъюнкция),
логическое ИЛИ (дизъюнкция)
следование (импликация),
равносильность (эквиваленция).

приоритет ↓

Операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \to B = \neg A \vee B.$$

Операцию «эквиваленция» также можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \leftrightarrow B = \neg A \wedge \neg B \vee A \wedge B.$$

Основные законы алгебры логики

Законы коммутативности	$A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$
Законы ассоциативности	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

Окончание табл.

Законы дистрибутивности	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
Закон непротиворечия (высказывание не может быть одновременно истинным и ложным)	$A \wedge \neg A = 0$
Закон исключения третьего (либо высказывание, либо его отрицание должно быть истинным)	$A \vee \neg A = 1$
Закон двойного отрицания	$\neg(\neg A) = A$
Законы де Моргана	$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
Законы рефлексивности (идемпотенции)	$A \vee A = A$, $A \wedge A = A$
Свойства логических констант 1 и 0	$A \wedge 0 = 0$, $A \wedge 1 = A$, $A \vee 0 = A$, $A \vee 1 = 1$
Законы поглощения	$A \vee (A \wedge B) = A$, $A \wedge (A \vee B) = A$, $A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B$

Связь алгебры логики с программированием

В большинстве существующих языков программирования предусмотрены функции для реализации основных логических операций («НЕ» — `NOT`, «И» — `AND`, `&`, «ИЛИ» — `OR`, `|`, «Исключающее ИЛИ» — `XOR`, `^`), позволяющих обрабатывать данные логического типа (`Boolean`). При этом обычно считается, что значение «ложь» (`FALSE`) связано с целочисленным значением 0, а значение «истина» (`TRUE`) — с целочисленным значением 1 (или любым ненулевым).

В программировании подобные логические операции широко используются вместе с операторами сравнения для формирования логических условий (в командах ветвления, циклах с пост- или предусловием и пр.), а также собственно для обработки логических данных. При этом синтаксис многих языков программирования допускает сложные конструкции из оператора присваивания и операций сравнения, например в языке БЕЙСИК является корректной запись:

```
X = (A = B)
```

Она означает, что выполняется сравнение значений переменных A и B и при их равенстве (для текстовых данных — совпадении) переменной X присваивается логическое значение «Истина» (иначе — «Ложь»).

Кроме операций над логическими данными, в некоторых языках программирования (например, Java или C) также предусмотрены *побитовые логические операции*, при которых целочисленные операнды рассматриваются как двоичные числа, выбранная логическая операция производится для каждой соответствующей по номеру позиции в числе пары битов, а результат представляет собой также целое число.

Применение алгебры логики при решении задач

Законы алгебры логики могут применяться при решении различных задач, связанных с принадлежностью точки заданному интервалу либо области, при определении выполнения или невыполнения заданного правила и т.д.

Примеры.

1. При решении задач типа «Какое из приведённых имён удовлетворяет логическому условию: $\neg$*(последняя буква гласная* $\rightarrow$ *первая буква согласная)* $\wedge$ *вторая буква согласная*» достаточно для каждого из трёх упомянутых в условии правил предусмотреть логическую переменную, значение которой равно 1 «Истина», если данное правило выполнено для конкретного имени, либо 0 («Ложь»), если данное правило не выполнено для конкретного имени, и далее вести обработку согласно правилам алгебры логики значений этих переменных.

2. При решении задач типа «*Для какого из указанных значений X истинно высказывание:* $\neg((X > 2) \rightarrow (X > 3))$» аналогичным образом выделяются логические переменные, соответствующие каждой из приведённых в условии операций сравнения для тех или

иных граничных и внутриинтервальных значений числовой переменной X, после чего полученные значения этих логических переменных обрабатываются согласно правилам алгебры логики.

3. При решении задач об определении принадлежности точек интервалу на числовой прямой либо области плоскости, заданной системой неравенств (задачи группы С1) логические операции используются при формировании требуемого условия, определяющего нужную область.

Правила, которыми нужно руководствоваться при решении логических задач с интервалами:

1) при обмене местами левой и правой частей неравенства его знак меняется на противоположный;

2) если неравенство является ложным, то эквивалентное ему истинное неравенство не только имеет противоположный знак, но и становится из строгого нестрогим и наоборот; то же самое происходит при замене истинного неравенства эквивалентным ему ложным;

3) соединение компонентов логического выражения операцией «И» соответствует *пересечению* интервалов их истинности (интервалов значений, при которых эти компоненты истинны); соединение компонентов логического выражения операцией «ИЛИ» соответствует *объединению* интервалов их истинности;

4) интервал ложности представляет собой всю часть числовой прямой, кроме интервала истинности этого выражения, — производится *вычитание* интервала истинности из числовой прямой; аналогично определяется интервал истинности по интервалу ложности.

Кроме того, при решении задач с интервалами надо внимательно читать текст условия: если в вопросе фигурирует, например, «наибольшее *натуральное* число X» или «наибольшее *целое положительное* число X», то это означает добавление дополнительного условия: $X > 0$.

Разбор типовых задач

Задача 1*. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
1	1	1	1

Каким выражением может быть F?

1) $X \wedge Y \wedge Z$

2) $\neg X \vee \neg Y \vee Z$

3) $X \vee Y \vee Z$

4) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

Решение

Обычно в таких задачах даётся только фрагмент таблицы истинности, поэтому пытаться решать задачу «в лоб», выводя соответствующее таблице логическое выражение и сравнивая его с вариантами ответов, бессмысленно. Лучше всего просто проверять предлагаемые ответы один за другим, поочерёдно подставляя в соответствующее логическое выражение значения переменных из каждой строки таблицы и проверяя, получается ли в результате указанное в той же строке таблицы требуемое значение F.

Если для какой-то из строк таблицы получается неправильный результат, то можно прервать проверку данного варианта ответа и сразу перейти к следующему варианту.

Проверяется первый вариант ответа: $X \wedge Y \wedge Z$, учитывая, что операция И даёт значение 1 только когда все значения переменных равны 1. (Серым цветом отмечаются строки таблицы, в которых результат вычисления выражения не совпадает с заданным значением F.)

X	Y	Z	$X \wedge Y \wedge Z$	F
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Таким образом, правильный ответ может быть найден практически сразу, но при наличии времени рекомендуется проверить и остальные варианты.

Проверяется второй вариант ответа: $\neg X \vee \neg Y \vee Z$, учитывая, что операция ИЛИ даёт значение 1, если значение хотя бы одной переменной равно 1 (для чего значения переменных, записанных с отрицанием, должны быть нулевыми).

X	Y	Z	¬X ∨ ¬Y ∨ Z	F
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

Проверяется третий вариант ответа: $X \lor Y \lor Z$.

X	Y	Z	X ∨ Y ∨ Z	F
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

Проверяется четвёртый вариант ответа: $\neg X \land \neg Y \land \neg Z$.

X	Y	Z	¬X ∧ ¬Y ∧ ¬Z	F
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
1	1	1	0	1

Таким образом, правильным является первый вариант ответа.

Ответ: вариант ответа №1.

Задача 2*. Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трёх аргументов: X, Y, Z.

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

X	Y	Z	F
0	1	1	0
1	1	1	1
0	0	1	1

Какое выражение соответствует F?

1) $X \land \neg Y \land \neg Z$
2) $\neg X \land \neg Y \land Z$
3) $\neg X \lor \neg Y \lor Z$
4) $X \lor \neg Y \lor \neg Z$

Решение

Проверяется первый вариант ответа: $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$, учитывая, что операция И даёт значение 1, только когда все значения переменных равны 1.

X	Y	Z	X ∧ ¬Y ∧ ¬Z	F
0	1	1	0	0
1	1	1	0	1
0	0	1		1

Проверяется второй вариант ответа: $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$.

X	Y	Z	¬X ∧ ¬Y ∧ Z	F
0	1	1	0	0
1	1	1	0	1
0	0	1		1

Проверяется третий вариант ответа: $\neg X \vee \neg Y \vee Z$, учитывая, что операция ИЛИ даёт значение 1, если значение хотя бы одной переменной равно 1.

X	Y	Z	¬X ∨ ¬Y ∨ Z	F
0	1	1	1	0
1	1	1		1
0	0	1		1

Проверяется четвёртый вариант ответа: $X \vee \neg Y \vee \neg Z$.

X	Y	Z	X ∨ ¬Y ∨ ¬Z	F
0	1	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Таким образом, правильным является четвёртый вариант ответа.

Ответ: вариант ответа №4.

Задача 3*. Какое из приведённых имён удовлетворяет логическому условию: (первая буква согласная →вторая буква согласная) $\wedge$ (предпоследняя буква гласная $\rightarrow$ последняя буква гласная)?

1) КРИСТИНА
2) МАКСИМ
3) СТЕПАН
4) МАРИЯ

Решение

Решение таких задач не составляет особых трудностей. Единственная «хитрость» состоит в том, что нужно сначала преобразовать запись логического выражения в более привычную таблицу двоичных значений 0 и 1. Строки этой таблицы соответствуют вариантам ответов.

Составляется таблица. (*Для справки:* операция И даёт значение 1, только когда все значения переменных равны 1, а операция следования ($\rightarrow$) даёт результат 0 только в одном случае — когда из 1 следует 0.)

Имя	**X_1: первая буква согласная**	**X_2: вторая буква согласная**	**X_3: предпоследняя буква гласная**	**X_4: последняя буква гласная**	**X_5: $X_1 \rightarrow X_2$**	**X_6: $X_3 \rightarrow X_4$**	**Результат: $X_5 \rightarrow X_6$**
КРИСТИНА	1	1	0	1	1	1	1
МАКСИМ	1	0	1	0	0	0	0
СТЕПАН	1	1	1	0	1	0	0
МАРИЯ	1	0	1	1	0	1	0

В таблице серым цветом выделена строка, соответствующая правильному ответу (первому).

⌛ Обнаружив, что условие выполняется для какого-то варианта, остальные варианты ответа можно не проверять.

Ответ: КРИСТИНА (вариант ответа №1).

Задача 4*. Какое из приведённых имён удовлетворяет логическому условию:
$\neg$(последняя буква гласная $\rightarrow$ первая буква согласная) $\wedge$
$\wedge$ вторая буква согласная

1) ИРИНА
2) АРТЁМ
3) СТЕПАН
4) МАРИЯ

Решение

Составляется таблица. (*Для справки:* операция И даёт значение 1, только когда все значения переменных равны 1, а операция следования (→) даёт результат 0 только в одном случае — когда из 1 следует 0.)

Имя	X_1: последняя буква гласная	X_2: первая буква согласная	X_3: вторая буква согласная	X_4: $X_1 \to X_2$	X_5: $\neg X_4$	Результат: $X_5 \to X_3$
ИРИНА	1	0	1	0	1	1
АРТЁМ	0	0	1	1	0	0
СТЕПАН	0	1	1	1	0	0
МАРИЯ	1	1	0	1	0	0

В таблице выделена строка, соответствующая правильному ответу (первому).

Ответ: ИРИНА (вариант ответа №1).

Задача 5*. Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению $A \vee \neg(\neg B \vee \neg C)$:

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$
2) $A \vee (B \wedge C)$
3) $A \vee B \vee C$
4) $A \vee \neg B \vee \neg C$

Решение

Преобразуется исходное выражение, используя законы алгебры логики:

$A \vee \neg(\neg B \vee \neg C) = \{$закон де Моргана$\} = A \vee (B \wedge C)$ (наличие скобок несущественно, так как операция «И» имеет более высокий приоритет, чем операция «ИЛИ»).

Полученное выражение совпадает с вариантом ответа №2.

Ответ: $A \vee (B \wedge C)$ (вариант ответа №2).

Задача 6*. Какое логическое выражение равносильно выражению $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge C$:

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$
2) $A \wedge B \wedge C$
3) $(A \vee B) \wedge C$
4) $(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C$

Решение

Преобразуется исходное выражение, используя законы алгебры логики:

$\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge C = \{$закон де Моргана$\} = A \wedge B \wedge C$.

Полученное выражение совпадает с вариантом ответа №2.

Ответ: $A \wedge B \wedge C$ (вариант ответа №2).

Задача 7*. Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

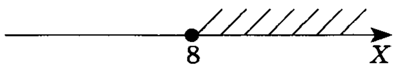
$$(50 < X \cdot X) \to (50 > (X + 1) \cdot (X + 1))?$$

Решение

В данной задаче требуется полностью решить задачу, а не проверять четыре предложенных варианта ответа, и добавлено ещё одно дополнительное условие: искомое число должно быть *целым* и *наибольшим*. Такое условие означает, что в результате решения логического уравнения необходимо получить диапазон значений X, который распространяется от требуемого наибольшего значения в сторону уменьшения. Решать же задачу лучше не табличным способом, а при помощи графической схемы, которая представляет собой пересекающиеся интервалы на числовой прямой.

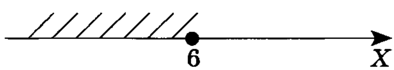
Способ 1

1. Строится интервал для условия $50 < X \cdot X$. Данное условие преобразовывается в эквивалентное условие $X \cdot X \geqslant 50$; кроме того, речь идёт только о целых числах: $X \geqslant 8$.



2. Строится интервал для условия $50 > (X + 1) \cdot (X + 1)$, которое преобразовывается в эквивалентное:

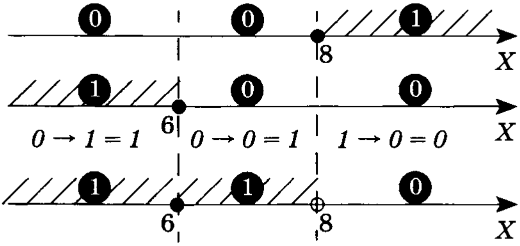
$$(X + 1) \cdot (X + 1) \leqslant 50, \text{ откуда } X \leqslant 6.$$



3. Теперь следует интерпретировать логическую операцию следования ($\to$) для построенных интервалов.

Интервалы располагаются один под другим. Заштрихованные значения соответствуют логической единице, а не заштрихованные — нулю.

Операция следования в данном случае «направлена сверху вниз». Она даёт значение 0, только когда из 1 следует 0, а в остальных случаях получается нужное значение 1 (истина). Поэтому, разбив числовую ось на соответствующие интервалы, нетрудно построить требуемый «результирующий» интервал.



При этом важно учитывать, что в исходных интервалах граничные точки принадлежат соответствующим интервалам и потому на эти точки полностью распространяется заданная логическая операция. Следовательно, в результирующем интервале граничная точка 8 (для которой выполняется равенство $1 \to 0 = 0$) уже не будет входить в результирующий «единичный» интервал. Наибольшее целое значение X, удовлетворяющее условию задачи, равно 7.

Способ 2

1. Наоборот, сначала рассматривается, в каких ситуациях истинна операция следования. Результат её выполнения является ложным в единственном случае — когда из 1 следует 0, и истинным в остальных случаях. Тогда исходное выражение можно представить как три возможных варианта систем неравенств:

$$(50 < X \cdot X) \to (50 > (X + 1) \cdot (X + 1))$$

$$\begin{cases} 50 < X \cdot X; & 1 \\ 50 > (X + 1) \cdot (X + 1); & 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 50 < X \cdot X; & 0 \\ 50 > (X + 1) \cdot (X + 1); & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50 < X \cdot X; & 0 \\ 50 > (X + 1) \cdot (X + 1); & 1 \end{cases}$$

Для поиска решений этих неравенств нужно в тех случаях, когда неравенство ложно (логическое значение 0), изменить знак неравенства на противоположный, причём строгое неравенство преобразуется в нестрогое и наоборот:

$$\begin{cases}50 < X \cdot X,\\ 50 > (X+1) \cdot (X+1);\end{cases} \qquad \begin{cases}50 \geqslant X \cdot X,\\ 50 > (X+1) \cdot (X+1);\end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases}X \cdot X > 50,\\ (X+1) \cdot (X+1) < 50;\end{cases} \qquad \begin{cases}X \cdot X \leqslant 50,\\ (X+1) \cdot (X+1) < 50;\end{cases}$$

$$\begin{cases}50 \geqslant X \cdot X,\\ 50 \leqslant (X+1) \cdot (X+1);\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}X \cdot X \leqslant 50,\\ (X+1) \cdot (X+1) \geqslant 50;\end{cases}$$

Значение $(X + 1) \cdot (X + 1)$ заведомо больше, чем значение $X \cdot X$. Поэтому первая система неравенств не имеет решения.

Решение (в целых числах) второй системы неравенств — интервал значений $(-\infty, 6]$. Он определяется по второму неравенству этой системы:

$(X+1) \cdot (X+1) < 50 \Rightarrow X+1 < \sqrt{50} \Rightarrow X+1 \leqslant 7 \Rightarrow X \leqslant 6.$

Решение (в целых числах) третьей системы неравенств — пересечение интервалов значений $(-\infty, 7]$ и $[7, +\infty)$, которое равно числу 7.

Из найденных двух чисел — решений систем уравнений — требуется наибольшее. Оно равно 7.

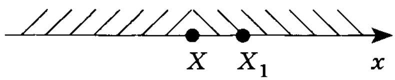
Способ 3

Операция следования даёт результат «Истина» в трёх случаях из четырёх возможных, а результат «Ложь» — только в одном случае из четырёх, когда из 1 («Истина») следует 0 («Ложь»). Поэтому удобно решать предложенную задачу в «обратной» формулировке:

Каково *наименьшее* целое число, при котором *ложно* высказывание $(50 < X \cdot X) \rightarrow (50 > (X + 1) \cdot (X + 1))$?

Прежде всего доказывается правомерность такой замены формулировки задачи.

Предполагается, что искомое значение X в первоначальной задаче найдено. Раз в исходной задаче оно названо наибольшим целым числом, то это означает, что заданное выражение истинно на диапазоне значений $(-\infty, X]$. Тогда на оставшейся части числовой оси, т.е. в диапазоне $(X, +\infty)$, данное выражение будет ложно. Определив наименьшее целое значение X_1, при котором заданное выражение ложно, легко получается искомое наибольшее X, при котором это выражение истинно: $X = X_1 - 1$.



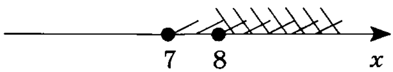
Новая задача решается:

1) Выражение $(50 < X \cdot X)\ \ (50 > (X + 1) \cdot (X + 1))$ ложно, когда

$$\begin{cases} 50 < X \cdot X \text{ — \textit{истинно};} \\ 50 > (X + 1) \cdot (X + 1) \text{ — \textit{ложно}.} \end{cases}$$

2) Первой операции сравнения соответствует диапазон целых чисел $[8, +\infty)$. Второй операции сравнения (учитывая, что она должна быть ложной, т.е. истинно сравнение $50 \leqslant (X + 1) \cdot (X + 1)$) соответствует диапазон целых чисел $[7, +\infty)$.

3) Графическое представление решения «модифицированной» задачи:



4) То, что оба условия сравнения объединены в систему, означает, что оба они должны выполняться одновременно. Следовательно, решением этой системы уравнений является *пересечение* построенных интервалов (пересечение множества составляющих их целых чисел). Этот *интервал ложности* операции следования — $[8, +\infty)$.

5) Наименьшее целое значение (наше X_1), при котором заданное выражение ложно, равно 8.

Искомое значение X в первоначальной задаче (наибольшее целое число, при котором исходное логическое выражение истинно) на 1 меньше найденного нами значения X_1.

Следовательно для исходной задачи ответ — число 7.

Ответ: 7

B15 Решение логических уравнений. Решение систем логических уравнений

Конспект

Теоретический материал по данной теме подробно представлен в разделе 4 «Основы логики».

Полезно запомнить следующее **правило**: если известно количество решений уравнения $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$, то количество возможных решений «противоположного» уравнения $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$ равно разности количества всех возможных комбинаций значений переменных $x_1, x_2, \dots x_n$ (которое равно 2^n) и количества решений уравнения $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$ (и, соответственно, наоборот):

Кол-во решений $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$	Кол-во всех возможных комбинаций $x_1, x_2, \dots x_n$	Кол-во решений $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$
X_1		X_0
=	2^n	=
$2^n - X_0$		$2^n - X_1$

Это правило легко доказать, рассмотрев полную таблицу истинности логической функции $F(x_1, x_2, \dots x_n)$: если исключить из нее строки, соответствующие значению $F = 1$, то останутся строки, соответствующие значению $F = 0$, и наоборот.

Разбор типовых задач

Задача 1*. Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((J \wedge \neg K) \to$$
$$\to \neg(M \wedge N \wedge L)) \wedge (M \to J) = 1,$$

где J, K, L, M, N — логические переменные?

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

Самая последняя по порядку выполнения логическая операция здесь — операция И. Её результат равен 1 только в одном-единственном случае — когда все операнды равны 1. Следовательно, взамен исходного уравнения получается система уравнений:

$$\begin{cases}(J \to K) \to (M \wedge N \wedge L) = 1;\\ (J \wedge \neg K) \to \neg(M \wedge N \wedge L) = 1;\\ M \to J = 1.\end{cases}$$

Сначала рассматривается третье уравнение. Из него однозначно определяется, что значение переменной J обязательно должно быть равно 1, а значение M может быть любым (2 возможных варианта значений переменных).

Операция следования даёт 0 в случае, когда из 1 следует 0, и 1 — во всех остальных случаях. Анализируются вторые операнды в двух первых уравнениях (во втором уравнении тот же самый компонент, что и в первом уравнении, взят с отрицанием).

Рассматривается каждый из возможных вариантов.

1. Пусть верно первое уравнение: $(J \to K) \to (M \wedge N \wedge L) = 1$. Тогда обязательное условие его выполнения — $M \wedge N \wedge L = 1$. Это возможно только в одном случае — когда все три эти переменные равны 1. А вот значение $J \to K$ может быть любым: 0 или 1.

Однако если $M \wedge N \wedge L = 1$, то второе уравнение будет истинным только в одном-единственном случае: когда $J \wedge \neg K = 0$: ведь $\neg(M \wedge N \wedge L)$ тогда равно 0, а операция следования при нулевом втором операнде даёт единицу, только если нулю равен и первый операнд. Причём J, как выяснилось ранее, может быть равно только 1. Значит, чтобы $J \wedge \neg K$ было равно 0, нужно, чтобы $\neg K$ было равно 0, т.е. чтобы K было равно 1. Итого по результатам анализа этой ситуации получается, что в данном случае возможен только один вариант значений переменных: $J = K = M = N = L = 1$.

2. Пусть теперь верно второе уравнение: $(J \wedge \neg K) \rightarrow \neg(M \wedge N \wedge L) = 1$. Тогда для его выполнения нужно, чтобы $\neg(M \wedge N \wedge L)$ было равно 1, т.е. $M \wedge N \wedge L = 0$. Это возможно, если хотя бы одна переменная имеет значение 0. Переменных три, следовательно, всех возможных комбинаций их значений будет $2^3 = 8$. Из них одна комбинация (когда все три переменных равны 1) не подходит, следовательно, пригодных вариантов остается 7. Однако если $M \wedge N \wedge L = 0$, то первое уравнение системы выполняется только в одном случае: если $J \rightarrow K = 0$. А это возможно только в одном случае: когда $J = 1$, а $K = 0$ (что не противоречит выводам для третьего уравнения системы). Значит, в этом случае возможно 7 вариантов значений переменных, при которых исходное уравнение верно.

Итого, для обоих рассмотренных случаев возможных вариантов значений переменных будет $7 + 1 = 8$.

Ответ: 8

Подобные логические рассуждения могут быть по силам не всем учащимся, да и хорошо знакомые с логикой школьники могут запутаться и допустить ошибку. Поэтому для таких задач на ЕГЭ лучше придерживаться следующего правила: если остаётся достаточно времени, то лучше решать такую задачу традиционным способом — составляя полную таблицу истинности и подсчитывая в ней количество «правильных» строк. Если время в дефиците, то можно попытаться сократить «рутинную» работу, поискав требуемую цепь логических рассуждений.

Задача 2*. Сколько различных решений имеет уравнение

$$J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge (N \vee \neg N) = 0,$$

где J, K, L, M, N — логические переменные?

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Решение.

Во-первых, комбинация $(N \vee \neg N)$ ***всегда*** равна 1, а это означает, что переменная N принципиально может быть любой и никак не определяет выполнение уравнения. Поэтому переменная N временно исключается из рассмотрения.

Во-вторых, операция И даёт в результате 0, если хотя бы один операнд равен 0.

В-третьих, «активных» переменных-операндов (значения которых могут влиять на результат выполнения логического выражения) — четыре.

Сколько не повторяющихся комбинаций можно составить из n элементов, каждый из которых может иметь значение 0 или 1? Очевидно[1], их будет 2^n. Соответственно, четыре переменные могут дать $2^4 = 16$ возможных комбинаций. Для решения годятся все, кроме одной — когда все эти операнды равны 1. Значит, пригодных комбинаций будет 15.

Переменная N может принимать любое из двух значений (0 или 1), не влияя на результат вычисления логического выражения. Следовательно, с учётом N возможно $2 \cdot 15 = 30$ возможных комбинаций пяти «участ-

[1] Ответить на этот вопрос очень просто, если вспомнить, что такими неповторяющимися комбинациями являются значения битов двоичного числа из соответствующего количества разрядов (в данном случае 4) при полном переборе числовых значений от 0 до максимально возможного значения (от 0000 до 1111). Количество всех возможных неповторяющихся комбинаций значений четырёх двоичных переменных равно $1111_2 + 1 = 16$ (где добавляемая ещё одна комбинация — та самая из одних нулей).

вующих» в уравнении логических переменных, при которых приведённое в условии логическое уравнение верно.

Ответ: 30.

При подготовке к экзамену для получения правильного ответа и проверки своего решения можно составить компьютерную программу, содержащую некоторое количество (по числу используемых в логическом уравнении переменных) вложенных циклов, в которых соответствующая цикловая переменная меняется от 0 до 1. Например[1]:

```
program z2005_b2;
  var k,l,m,n : boolean;
      x : byte;
  begin
    x := 0;
    for k := false to true do
      for l := false to true do
        for m := false to true do
          for n := false to true do
              if (k and l and m) or (not(l) and
                 not(m) and n) then x := x + 1;
    writeln ('кол-во решений:',x);
     end.
```

Задача 3*. Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases}((x_1 \equiv x_2) \vee (x_3 \equiv x_4)) \wedge (\neg(x_1 \equiv x_2) \vee \neg(x_3 \equiv x_4)) = 1,\\ ((x_3 \equiv x_4) \vee (x_5 \equiv x_6)) \wedge (\neg(x_3 \equiv x_4) \vee \neg(x_5 \equiv x_6)) = 1,\\ \ldots\\ ((x_7 \equiv x_8) \vee (x_9 \equiv x_{10})) \wedge (\neg(x_7 \equiv x_8) \vee \neg(x_9 \equiv x_{10})) = 1,\end{cases}$$

где x_1, x_2, ..., x_{10} — логические переменные?

[1] На Паскале вместо значений 0 и 1 нужно использовать логические (тип `boolean`) значения `true` и `false`, однако в операторе цикла `for` эти значения можно использовать так же, как константы 1 и 0 соответственно, так как логический тип тоже является перечислимым. Кроме того, поскольку нужно проверять равенство заданного логического выражения значению 1 (т.е. `true`), в условном операторе нет необходимости записывать операцию сравнения: ведь ветвь `then` выполняется только в этом случае.

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений x_1, x_2, ..., x_{10}, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Решение

1) Анализируется первое уравнение:

$((x_1 \equiv x_2) \vee (x_3 \equiv x_4)) \wedge (\neg(x_1 \equiv x_2) \vee \neg(x_3 \equiv x_4)) = 1.$

Последняя выполняемая операция здесь — **И**, поэтому:

$((x_1 \equiv x_2) \vee (x_3 \equiv x_4)) = 1$ и $(\neg(x_1 \equiv x_2) \vee \neg(x_3 \equiv x_4)) = 1.$

Следует обратить внимание: в обеих частях записаны одни и те же тождества, только в первом случае они записаны «как есть», а во втором — с отрицаниями. Тогда, если $(x_1 \equiv x_2) = 1$ и $(x_3 \equiv x_4) = 1$, то первая запись будет истинной, но тогда $\neg(x_1 \equiv x_2)$ и $\neg(x_3 \equiv x_4)$ оба будут ложными, и вторая запись ложна. И наоборот, при $(x_1 \equiv x_2) = 0$ и $(x_3 \equiv x_4) = 0$ первая запись будет ложной, а вторая (с отрицаниями) — истинной. Не подходит ни тот, ни другой вариант. «Спасает положение» то, что тождества в обеих записях соединены операцией **ИЛИ**, т.е. оба раза достаточно, чтобы единице было равно хотя бы одно из этих тождеств.

Вывод: чтобы первое уравнение системы было равно 1, нужно, чтобы либо $(x_1 \equiv x_2) = 1$ и $(x_3 \equiv x_4) = 0$, либо, наоборот, $(x_1 \equiv x_2) = 0$ и $(x_3 \equiv x_4) = 1$.

Первое из этих «либо» даёт такие варианты значений переменных, когда x_1 и x_2 одинаковы, а x_3 и x_4 различны:

(0, 0, 1, 0)
(0, 0, 0, 1)
(1, 1, 1, 0)
(1, 1, 0, 1)

Второе «либо», аналогично, даёт варианты, в которых, наоборот, x_1 и x_2 различны, а x_3 и x_4 одинаковы:

(1, 0, 0, 0)
(0, 1, 0, 0)
(1, 0, 1, 1)
(0, 1, 1, 1)

Всего — 8 вариантов.

2) Добавляется в анализ второе уравнение:

$((x_3 \equiv x_4) \vee (x_5 \equiv x_6)) \wedge (\neg(x_3 \equiv x_4) \vee \neg(x_5 \equiv x_6)) = 1.$

Рассуждая аналогично и учитывая, что для x_3 и x_4 возможные варианты «унаследованы» от предыдущего уравнения, получается, что в вариантах значений x_5, x_6, добавленных этим вторым уравнением, для одинаковых значений x_3 и x_4 должны быть разными значения x_5 и x_6, а для различных значений x_3 и x_4 — одинаковые значения x_5 и x_6:

(1, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0, 1, 0)
	(1, 0, 0, 0, 0, 1)
(0, 1, 0, 0)	(0, 1, 0, 0, 1, 0)
	(0, 1, 0, 0, 0, 1)
(1, 0, 1, 1)	(1, 0, 1, 1, 1, 0)
	(1, 0, 1, 1, 0, 1)
(0, 1, 1, 1)	(0, 1, 1, 1, 1, 0)
	(0, 1, 1, 1, 0, 1)

(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 1, 0, 0, 0)
	(0, 0, 1, 0, 1, 1)
(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 1, 0, 0)
	(0, 0, 0, 1, 1, 1)
(1, 1, 1, 0)	(1, 1, 1, 0, 0, 0)
	(1, 1, 1, 0, 1, 1)
(1, 1, 0, 1)	(1, 1, 0, 1, 0, 0)
	(1, 1, 0, 1, 1, 1)

Итого из 8 предыдущих вариантов благодаря второму уравнению получается 16 (вдвое больше).

3) Очевидно, такая тенденция сохранится и дальше, ведь уравнения системы — типовые. Значит, добавление в рассмотрение третьего уравнения, пропущенного в записи системы и использующего переменные x_5, x_6, x_7, x_8, снова удвоит количество вариантов значений переменных: из 16 их получится 32.

Аналогично, последнее, четвёртое уравнение системы (переменные x_7, x_8, x_9, x_{10}) снова удваивает количество вариантов, «унаследованное» от предыдущего уравнения. В итоге для всей системы уравнений получается 64 возможных варианта значений переменных $x_1 - x_{10}$.

Ответ: 64 варианта значений переменных.

Задача 4. Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_4) \wedge (x_4 \to x_5) = 1;$$
$$(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_3) \wedge (y_3 \to y_4) \wedge (y_4 \to y_5) = 1;$$
$$y_5 \to x_5 = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Решение

Как и всегда при решении задач с системами логических уравнений, нужно сначала проанализировать каждое уравнение в отдельности. При этом, первое и второе уравнения заданной системы практически идентичны (с точностью до имён переменных — «игреки» вместо «иксов»), и это существенно облегчает работу.

Анализируя первое уравнение:

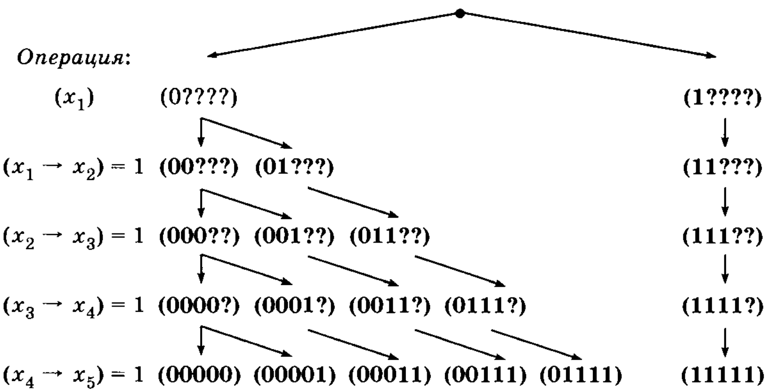
$$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_4) \wedge (x_4 \to x_5) = 1.$$

Таблица истинности логической операции следования: единственная ситуация, при которой её результат равен нулю, — когда из единицы следует нуль, а во всех других случаях эта операция возвращает единицу:

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Кроме того, поскольку все отдельные операции следования в первом уравнении соединены операцией И, для выполнения заданного в нём равенства требуется, чтобы *все* операции следования давали в результате единицу.

Чтобы найти все возможные комбинации значений переменных, задействованных в первом уравнении, удобнее всего выполнить построение дерева решений: это позволит не запутаться и не пропустить какие-то варианты. При построении дерева на каждом его очередном шаге анализируется очередная пара переменных и для каждой имеющейся ветви определяются дальнейшие варианты ветвления. Слева указываются логические операции следования, которые и анализируются на соответствующих шагах (уровнях дерева). Ключевым моментом при построении дерева является уже отмеченный выше факт, что для получения единичного результата из нуля может следовать любое значение второй переменной, а из единицы — *только* единица.



Основную идею при построении данного дерева можно условно выразить фразой: «*размножаются только нули*». То есть если имеется начало набора значений пяти переменных, которое на данный момент завершается нулём, то продолжить его можно как нулём, так и единицей (в дереве имеется ветвление), но если текущая последовательность заканчивается единицей, то продолжать её можно *только* единицей, и в дереве не будет никакого ветвления, а только продолжение уже существующей ветви.

Полный набор возможных значений переменных, удовлетворяющих первому уравнению, тогда содержится в самой нижней строке построенного дерева (в его «листьях»): $(x_1x_2x_3x_4x_5)$ = (00000), (00001), (00011), (00111), (01111), (11111).

Второе уравнение по структуре полностью совпадает с первым. Поэтому анализировать его нет необходимости, и можно сразу записать набор возможных для него значений переменных: $(y_1y_2y_3y_4y_5)$ = (00000), (00001), (00011), (00111), (01111), (11111).

Если бы в условии задачи присутствовали только рассмотренные два уравнения, то, поскольку в них нет общих переменных, решением этой системы уравнений были бы *все* возможные попарные сочетания найденных наборов значений «иксов» и «игреков». Именно третье уравнение, в котором одной логической операцией связаны один из «иксов» и один из «игреков», является «*ключом*», определяющим выбор: какие из найденных комбинаций наборов значений $(x_1x_2x_3x_4x_5)$ и $(y_1y_2y_3y_4y_5)$ подходят, а какие — нет.

Запись этого третьего уравнения:

$y_5 \rightarrow x_5 = 1.$

Согласно ему, из всех найденных пар наборов значений «иксов» и «игреков» для решения подходят только такие, в которых значения указанных переменных соответствуют истинности заданной логической операции, т.е.:

- когда в наборе значений $(y_1y_2y_3y_4y_5)$ пятая цифра равна нулю, в пару с ним годятся *любые* наборы значений $(x_1x_2x_3x_4x_5)$, поскольку, что бы в них ни стояло в пятой позиции (0 или 1), результат операции $y_5 \rightarrow x_5 = 1$ в любом случае будет равен 1 (см. таблицу истинности для этой операции);

- когда в наборе значений $(y_1y_2y_3y_4y_5)$ пятая цифра равна единице, в пару с ним годятся *только такие* наборы значений $(x_1x_2x_3x_4x_5)$, в которых пятая цифра равна 1.

Удобнее и нагляднее всего расписать все получаемые комбинации значений x и y в виде таблицы (*«матрицы решений»*). Анализируемые цифры в ней выделены подчеркиванием.

$(y_1y_2y_3y_4y_5)$	$(x_1x_2x_3x_4x_5)$						*Кол-во вариантов (пар)*
	(00000)	**(00001)**	**(00011)**	**(00111)**	**(01111)**	**(11111)**	
(00000)	+	+	+	+	+	+	**6**
(00001)	–	+	+	+	+	+	**5**
(00011)	–	+	+	+	+	+	**5**
(00111)	–	+	+	+	+	+	**5**
(01111)	–	+	+	+	+	+	**5**
(11111)	–	+	+	+	+	+	**5**
Всего возможных вариантов (пар) наборов значений $(x_1x_2x_3x_4x_5)$ и $(y_1y_2y_3y_4y_5)$:							**31**

Ответ: заданная система уравнений имеет 31 решение.

Таким образом, в данной задаче система логических уравнений состоит из двух чётко обособленных частей: первые два уравнения представляют собой «генераторы наборов значений переменных», а последнее уравнение — это «селектор», «фильтр», осуществляющий отбор из всех возможных попарных комбинаций наборов «иксов» и «игреков».

Задача 5*. Сколько существует различных наборов значений логических переменных $x_1, x_2, ..., x_9, x_{10}$, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_4) = 0,$$
$$(x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_5 \wedge \neg x_6) = 0,$$
$$(x_5 \wedge \neg x_6) \vee (x_7 \wedge \neg x_8) = 0,$$
$$(x_7 \wedge \neg x_8) \vee (x_9 \wedge \neg x_{10}) = 0.$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений x_1, x_2, ..., x_9, x_{10}, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Решение

1. Анализ начинается с последнего уравнения:
$(x_7 \wedge \neg x_8) \vee (x_9 \wedge \neg x_{10}) = 0.$

Это уравнение состоит из двух операндов (скобок), соединённых логической операцией **ИЛИ**. Результат выполнения операции **ИЛИ** равен нулю в единственном случае — если оба операнда равны нулю. Тогда:

$$\begin{cases}(x_7 \wedge \neg x_8) = 0,\\(x_9 \wedge \neg x_{10}) = 0.\end{cases}$$

Анализируются все возможные варианты значений переменных x_7, x_8, x_9, x_{10}, удовлетворяющие этим условиям, и составляется таблица. При этом учитывается, что логическая операция И даёт нулевой результат в трёх случаях — когда хотя бы одна переменная равна нулю или обе переменные равны нулю, и для каждого такого случая для первой пары переменных возможно по три случая для второй пары переменных. Кроме того, нужно учитывать, что переменные x_8 и x_{10} записаны с отрицаниями, поэтому в таблицу нужно записывать противоположные значения.

Таблица 1.1

$(x_7 \wedge \neg x_8)$	$(x_9 \wedge \neg x_{10})$
0	0

Таблица 1.2

x_7	x_8	x_9	x_{10}
		0	1 $(\neg 0)$
0	1 $(\neg 0)$	0	0 $(\neg 1)$
		1	1 $(\neg 0)$
		0	1 $(\neg 0)$
0	0 $(\neg 1)$	0	0 $(\neg 1)$
		1	1 $(\neg 0)$
		0	1 $(\neg 0)$
1	1 $(\neg 0)$	0	0 $(\neg 1)$
		1	1 $(\neg 0)$

2. Аналогично анализируется предпоследнее уравнение: $(x_5 \wedge \neg x_6) \vee (x_7 \wedge \neg x_8) = 0$.

Это уравнение также состоит из двух операндов, соединённых логической операцией ИЛИ, которая даёт нулевой результат, если оба операнда равны нулю:

$$\begin{cases}(x_5 \wedge \neg x_6) = 0,\\(x_7 \wedge \neg x_8) = 0.\end{cases}$$

Так же, как для последнего уравнения, записываются в таблицу все возможные варианты значений переменных x_5, x_6, x_7, x_8, удовлетворяющие этим условиям. Поскольку структура обоих рассмотренных уравнений одинакова, заполнение таблицы будет точно таким же.

Таблица 2.1

$(x_5 \wedge \neg x_6)$	$(x_7 \wedge \neg x_8)$
0	0

Таблица 2.2

x_5	x_6	x_7	x_8
		0	1 (¬0)
0	1 (¬0)	0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)
		0	1 (¬0)
0	0 (¬1)	0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)
		0	1 (¬0)
1	1 (¬0)	0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)

Для всех четырёх уравнений структура и заполнение таблицы возможных значений четырёх используемых в каждом уравнении переменных одна и та же. Смысл решения задачи проявляется во взаимосвязи между этими таблицами, отражающими взаимосвязь между уравнениями.

Следует обратить внимание, что переменные x_7 и x_8 используются в обоих рассмотренных уравнениях. Поэтому для каждого варианта (набора значений) переменных x_7 и x_8, приведённого в таблице 2.2, нужно определить количество наборов переменных x_7, x_8, x_9, x_{10}, имеющихся в таблице 1.2.

Таблица 2.2 (дополненная)

x_5	x_6	x_7	x_8	Кол-во вариантов с учётом x_9, x_{10}
0	1 (¬0)	0	1 (¬0)	3 ❶
		0	0 (¬1)	3 ❷
		1	1 (¬0)	3 ❸
0	0 (¬1)	0	1 (¬0)	3 ❶
		0	0 (¬1)	3 ❷
		1	1 (¬0)	3 ❸
1	1 (¬0)	0	1 (¬0)	3 ❶
		0	0 (¬1)	3 ❷
		1	1 (¬0)	3 ❸

Таблица 1.2

x_7	x_8	x_9	x_{10}
0 ❶	1 (¬0)	0	1 (¬0)
		0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)
0 ❷	0 (¬1)	0	1 (¬0)
		0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)
1 ❸	1 (¬0)	0	1 (¬0)
		0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)

3. Аналогично анализируется второе по счёту уравнение: $(x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_5 \wedge \neg x_6) = 0$.

Таблица 3.1

$(x_3 \wedge \neg x_4)$	$(x_5 \wedge \neg x_6)$
0	0

Таблица 3.2

x_3	x_4	x_5	x_6
0	1 (¬0)	0	1 (¬0)
		0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)
0	0 (¬1)	0	1 (¬0)
		0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)
1	1 (¬0)	0	1 (¬0)
		0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)

Переменные x_5 и x_6 используются в двух рассмотренных уравнениях (втором и третьем), поэтому для каждого варианта (набора значений) переменных x_5

и x_6 в таблице 3.2 нужно определить количество наборов переменных x_5, x_6, x_7, x_8, имеющихся в таблице 2.2 (с учётом ранее определённых количеств вариантов для x_7, x_8).

Таблица 3.2 (дополненная)

x_3	x_4	x_5	x_6	**Кол-во вариантов с учётом x_7, x_8, x_9, x_{10}**
0	1 (¬0)	0	1 (¬0)	9 (3+3+3) 1
		0	0 (¬1)	9 (3+3+3) 2
		1	1 (¬0)	9 (3+3+3) 3
0	0 (¬1)	0	1 (¬0)	9 (3+3+3) 1
		0	0 (¬1)	9 (3+3+3) 2
		1	1 (¬0)	9 (3+3+3) 3
1	1 (¬0)	0	1 (¬0)	9 (3+3+3) 1
		0	0 (¬1)	9 (3+3+3) 2
		1	1 (¬0)	9 (3+3+3) 3

Таблица 2.2

x_5	x_6	x_7	x_8	**Кол-во вариантов**
0 1	1 (¬0)	0	1 (¬0)	3
		0	0 (¬1)	3
		1	1 (¬0)	3
0 2	0 (¬1)	0	1 (¬0)	3
		0	0 (¬1)	3
		1	1 (¬0)	3
1 3	1 (¬0)	0	1 (¬0)	3
		0	0 (¬1)	3
		1	1 (¬0)	3

4. Аналогично анализируется первое уравнение: $(x_1 \land \neg x_2) \lor (x_3 \land \neg x_4) = 0$.

Таблица 4.1

$(x_1 \land \neg x_2)$	$(x_3 \land \neg x_4)$
0	0

Таблица 4.2

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1 (¬0)	0	1 (¬0)
		0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)
0	0 (¬1)	0	1 (¬0)
		0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)
1	1 (¬0)	0	1 (¬0)
		0	0 (¬1)
		1	1 (¬0)

Переменные x_3 и x_4 используются в двух уравнениях (первом и втором), поэтому для каждого варианта (набора значений) переменных x_3 и x_4 в таблице 4.2 нужно определить количество наборов переменных x_3, x_4, x_5, x_6, имеющихся в таблице 3.2 (с учётом ранее определённых количеств вариантов для x_5, x_6).

Таблица 4.2 (дополненная)

x_1	x_2	x_3	x_4	Кол-во вариантов с учетом x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}
0	1 (¬0)	0	1 (¬0)	27 (9+9+9) ❶
		0	0 (¬1)	27 (9+9+9) ❷
		1	1 (¬0)	27 (9+9+9) ❸
0	0 (¬1)	0	1 (¬0)	27 (9+9+9) ❶
		0	0 (¬1)	27 (9+9+9) ❷
		1	1 (¬0)	27 (9+9+9) ❸
1	1 (¬0)	0	1 (¬0)	27 (9+9+9) ❶
		0	0 (¬1)	27 (9+9+9) ❷
		1	1 (¬0)	27 (9+9+9) ❸
ИТОГО				9 27 = 243 варианта

Таблица 3.2

x_3	x_4	x_5	x_6	Кол-во вариантов
0 ❶	1 (¬0)	0	1 (¬0)	9
		0	0 (¬1)	9
		1	1 (¬0)	9
0 ❷	0 (¬1)	0	1 (¬0)	9
		0	0 (¬1)	9
		1	1 (¬0)	9
1 ❸	1 (¬0)	0	1 (¬0)	9
		0	0 (¬1)	9
		1	1 (¬0)	9

Ответ: 243 варианта.