

2014

Подготовка к ЕГЭ по математике

Теория для решения задач В11

Открытый банк заданий ЕГЭ по
математике <http://mathege.ru>



Что необходимо знать для решения заданий ? Это:

1. Формулы сокращённого умножения
2. Свойства показателей степени
3. Свойства корней
4. Основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов
5. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него; формулы тангенса, котангенса; синуса и косинуса суммы и разности двух аргументов, формулы синуса и косинуса двойного аргумента
6. Знаки тригонометрических функций
7. Чётность и нечётность тригонометрических функций
8. Периодичность тригонометрических функций
9. Значения тригонометрических функций
10. Формулы приведения

Необходимо уметь оперировать действиями с дробями (сокращение дроби, нахождение общего знаменателя) и переводить градусную меру угла в радианную и наоборот.

Итак, формулы сокращённого умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Степени и корни:

$$a^0 = 1$$

Нулевая степень любого числа равна единице.

* * *

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0 \quad n - \text{натуральное число}$$

Суть данного свойства заключается в том, что при переносе числителя в знаменатель и наоборот, знак показателя степени меняется на противоположный. Например:

$$\frac{x^7}{y^{-2}} = \frac{y^2}{x^{-7}}$$

Следствие из данного свойства $a^{-1} = \frac{1}{a}$

* * *

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

* * *

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней складываются.

* * *

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad m > n, \quad a \neq 0$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней вычитаются.

* * *

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

При возведении степени в степень основание остаётся прежним, а показатели перемножаются.

* * *

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.

* * *

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

При возведении в степень дроби, в эту степень возводится и числитель и знаменатель.

* * *

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \quad (m > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \quad (k > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{если } m \leq 0, \text{ то } a \neq 0$$

Логарифм

Логарифмом числа a по основанию b называется показатель степени, в который нужно возвести b , чтобы получить a .

$$\log_b a = x \quad b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$$

Например:

$$\log_3 9 = 2, \text{ так как } 3^2 = 9$$

Основное логарифмическое тождество:

$$b^{\log_b a} = a$$

Свойства логарифмов:

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_x(ab) = \log_x a + \log_x b$$

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Тригонометрические формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

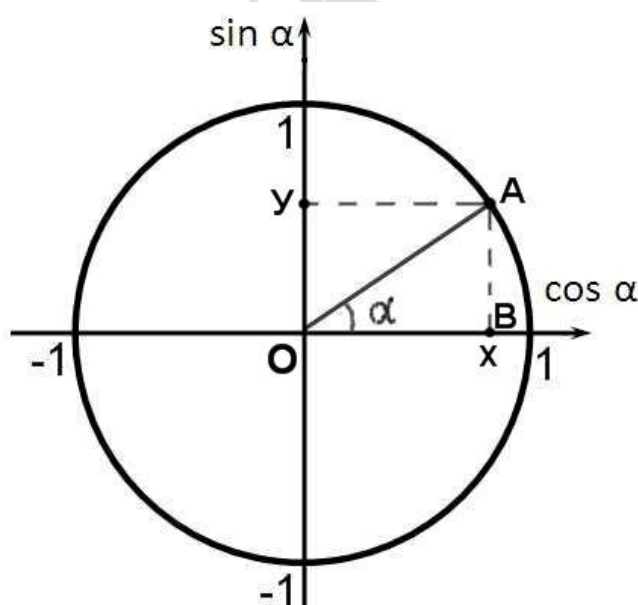
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\end{aligned}$$

Знаки тригонометрических функций

Построим тригонометрическую окружность; радиус-вектор, повернутый на произвольный угол от 0 до 90 градусов; обозначим абсциссу и ординату точки пересечения радиус-вектора и единичной окружности соответственно x и y :



OA – это радиус-вектор

A – точка пересечения радиус-вектора и тригонометрической окружности

α – угол, на который поворачивается радиус-вектор

y – ордината точки A

x – абсцисса точки A

Рассмотрим прямоугольный треугольник ОВА, по определению синуса в прямоугольном треугольнике:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{y}{1} = y$$

По определению косинуса в прямоугольном треугольнике:

$$\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{x}{1} = x$$

Тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

Котангенс:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

Кстати, один из выводов:

Известно, что по теореме Пифагора $OA^2 = x^2 + y^2$ то есть $1 = x^2 + y^2$

Так как выше мы получили:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{x}{1} = x$$

ЗНАЧИТ

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

ЭТО ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

Понимание «природы» этой формулы, а также знание информации, которую даёт нам тригонометрическая окружность определяет ваш успех в разделе курса «Тригонометрия» .

Определение

Синусом угла α называется ордината (координата y) точки на тригонометрической окружности, которая возникает при повороте радиус-вектора на угол α .

Определение

Косинусом угла α называется абсцисса (координата x) точки на тригонометрической окружности, которая возникает при повороте радиус-вектора на угол α .

Тангенс угла α — это отношение синуса к косинусу. Или, по-другому: отношение координаты y к координате x .

Предлагаем запомнить:

**СИНУС ЭТО ОСЬ ОРДИНАТ
КОСИНУС ЭТО ОСЬ АБСЦИСС**

(таких определений нет, это условный «штамп», но
в голове он быть должен)

Определения синуса, косинуса и тангенса указанные выше знакомы из курса алгебры старших классов. А теперь следствия из них, которые возникают на тригонометрической окружности:

*Значения синусов углов лежащих в первой и второй четверти
положительны, а лежащих в третьей и четвёртой четверти
отрицательны.*

*Значения косинусов углов лежащих в первой и четвёртой четверти
положительны, а лежащих во второй и третьей четверти
отрицательны.*

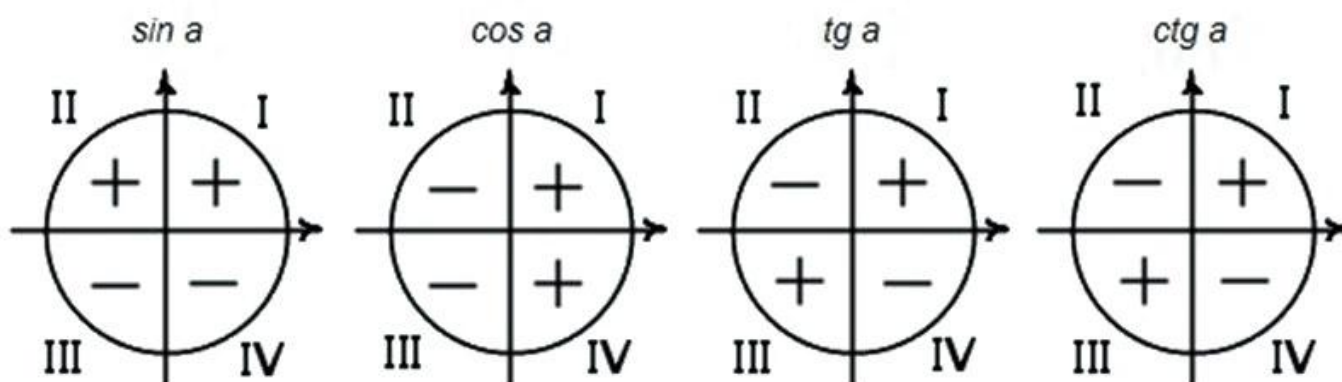
Знак тангенса определяется просто, в каждой четверти определяем знак синуса и косинуса и делим синус на косинус по определению:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Знак котангенса:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

При делении положительного числа на положительное, получаем положительное число; при делении положительного числа на отрицательное получаем отрицательное число. При делении отрицательного числа на положительное, получаем отрицательное число; при делении отрицательного числа на отрицательное получаем положительное число. Как вы поняли знаки тангенса и котангенса во всех четвертях одинаковы.



Чётность и нечётность тригонометрических функций

Запомните как факт то, что функции:

синус – нечётная $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

косинус – чётная $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

тангенс – нечётная $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

котангенс – нечётная $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

(для тех, кому этого факта недостаточно, загляните в курс алгебры «чётность-нечётность тригонометрических функций»)

Периодичность тригонометрических функций

Суть понятия «периодичность функции» заключается в том, что значения функции через определённый период равны. Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс и котангенс периодичны. Период синуса и косинуса равен 2π (360°), тангенса и котангенса равен π (180°). Нагляднее всего это можно увидеть по графику. Мы покажем формальное выражение периодичности:

$$\sin(\alpha \pm 360^\circ n) = \sin \alpha$$

$$\text{Например: } \sin 750^\circ = \sin(30^\circ + 360^\circ \cdot 2) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\alpha \pm 360^\circ n) = \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Например: } \cos 480^\circ &= \cos(120^\circ + 360^\circ) = \cos 120^\circ = \\ &= \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Здесь мы использовали ещё и формулу приведения (о них смотрите ниже).

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 180^\circ n) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm 180^\circ n) = \operatorname{ctg} \alpha$$

Таким образом, используя свойство периодичности можно значительно упрощать данные выражения, и производить дальнейшие вычисления. Незнание и непонимание, предоставленной в этом пособии теоретического материала (и вообще данной теории из курса алгебры), приведёт к невозможности решения нескольких заданий на ЕГЭ.

Тригонометрические уравнения попадают далеко не многим, но неизвестно, какие изменения ожидает ЕГЭ в будущем.

Значения тригонометрических функций

Перед вами табличные значения

$\sin$, $\cos$, tg , ctg острых углов

которые необходимо выучить и помнить.

Аргумент	Функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0° (0)	0	1	0	не определен
30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

Знание этих значений необходимо, это «азбука», без которой невозможно будет справиться с множеством заданий. Отлично, если память хорошая, вы легко выучили и запомнили эти значения. Что делать, если этого сделать не получается, в голове путаница, да просто вы именно при сдаче экзамена сбились. Обидно будет потерять бал из-за того, что вы запишите при расчётах неверное значение.

Предлагаем алгоритм, благодаря которому вы легко, в течение минуты восстановите в памяти все вышеуказанные значения:

1. Записываем в строчку углы от 0 до 90 градусов.

0° 30° 45° 60° 90°

2. Записываем слева в столбик синус и косинус аргумента:

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$					
$\cos \alpha$					

3. Напротив синуса пишем числа от нуля до четырёх (под значениями углов). Напротив косинуса от 4 до 0.

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	1	2	3	4
$\cos \alpha$	4	3	2	1	0

4. Далее извлекаем корень

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
$\cos \alpha$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$

5. Делим на 2

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

6. Считаем

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Мы получили значения синуса и косинуса углов от 0 до 90 градусов.

Тренируйтесь, проработайте данный алгоритм раз семь, процесс займёт минут десять.

Далее, зная формулы тангенса и котангенса

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

вы сможете найти значения всех вышеуказанных углов.

Например:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

И так для любого угла.

Формулы приведения

Функция / угол в рад.	$\pi/2 - \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$3\pi/2 - \alpha$	$3\pi/2 + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
Функция / угол в °	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$

Вам не нужно учить таблицу и запоминать эти формулы. Необходимо уяснить «закон», который здесь работает:

1. Необходимо определить знак функции в соответствующей четверти.
2. При 90° и 270° функция изменяется на кофункцию (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс)

При 180° и 360° функция на кофункцию не изменяется. Всё.

Рассмотрим примеры:

Пример 1: $\cos(90^\circ - \alpha)$

Косинус в первой четверти положителен, меняем функцию на кофункцию. Значит $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

Пример 2: $\cos(270^\circ - \alpha)$

Косинус в третьей четверти отрицателен, меняем функцию на кофункцию. Значит $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$

Пример 3: $\sin(270^\circ - \alpha)$

Синус в третьей четверти отрицателен, меняем функцию на кофункцию. Значит $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

Запишем формальный вид (все формулы приведения):

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

Перевод градусной меры угла в радианную и наоборот

В курсе алгебры углы рассматриваются в двух мерах (есть ещё меры углов): градусах и радианах. Для тех, кто затрудняется легко оперировать этими двумя мерами углов, то есть легко переводить из одной меры в другую, производить вычисления в обеих мерах, мы рекомендуем все вычисления производить в градусной мере (то есть переводить радианы, если они есть в условии, в градусы). Здесь всё предельно просто, нужно уяснить раз и на всегда: π радиан это 180 градусов, то есть 3,14 радиан это 180 градусов.

Примеры перевода радианной меры в градусную, когда в выражении угла имеется число Пи:

$$\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{5 \cdot 180}{6} = 150^\circ$$

$$\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{180}{6} = 30^\circ$$

$$\frac{9\pi}{4} \Rightarrow \frac{9 \cdot 180}{4} = 405^\circ$$

Если же радианы заданы в целых, дробных числах либо целым числом с дробной частью, тогда составляется пропорция.

Примеры перевода градусной меры в радианную.

Переведём 450, 300, 210 и 480 градусов. Составляем пропорции:

$$\begin{array}{l} \pi \text{ рад} - 180^\circ \\ x \text{ рад} - 450^\circ \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{\pi \cdot 450}{180} = \frac{\pi \cdot 5}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\begin{array}{l} \pi \text{ рад} - 180^\circ \\ x \text{ рад} - 300^\circ \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{\pi \cdot 300}{180} = \frac{\pi \cdot 5}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\begin{array}{l} \pi \text{ рад} - 180^\circ \\ x \text{ рад} - 210^\circ \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{\pi \cdot 210}{180} = \frac{\pi \cdot 7}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\begin{array}{l} \pi \text{ рад} - 180^\circ \\ x \text{ рад} - 480^\circ \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{\pi \cdot 480}{180} = \frac{\pi \cdot 8}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Приведём таблицу соответствия радиан градусам (от 0 до 360 градусов):

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Советуем вам распечатать теорию, предоставленную выше или иметь перед собой справочник формул. Просмотра и понимания теории недостаточно, важна практика. Только она способна закрепить знания в вашей способной голове.