

КНИЖКА-ШПАРГАЛКА

# МАТЕМАТИКА

## В кармане

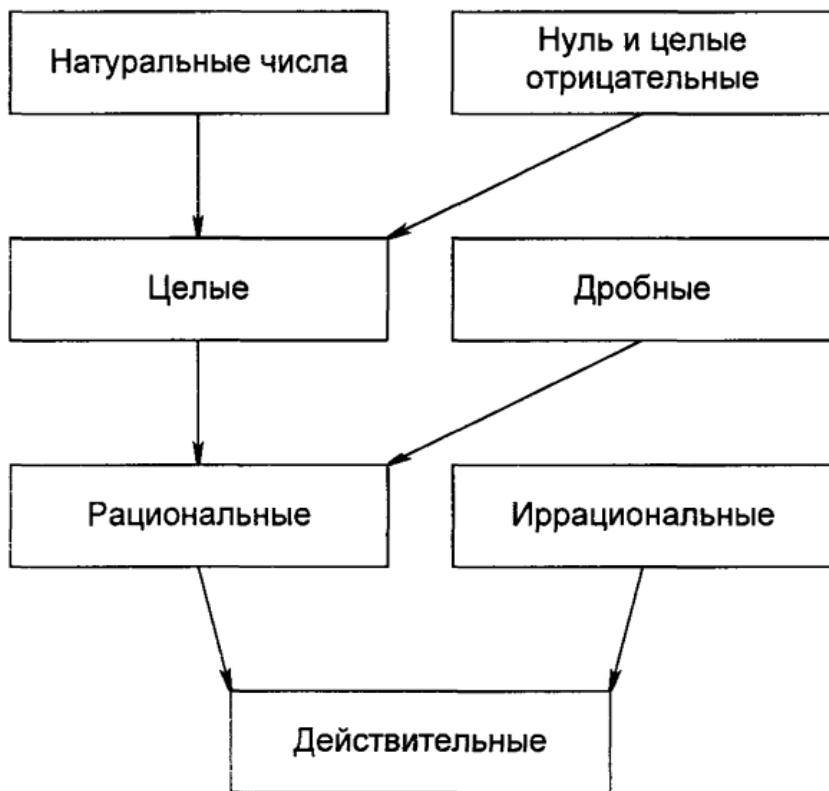
1,492	15,145	7,714	7,648	12,132	11,131
1,383	14,191	2,708	3,944	12,306	9,048
4,980	14,832	2,392	5,747	13,608	8,043
4,796	15,165	2,411	13,200	13,200	8,043
4,899	15,199	13,359	13,359	13,359	8,042
5,000	15,199	13,359	13,359	13,359	8,040
5,099	15,199	13,359	13,359	13,359	8,038
5,196	15,199	13,359	13,359	13,359	8,037
5,292	15,199	13,359	13,359	13,359	8,036
5,385	15,199	13,359	13,359	13,359	8,034
5,477	15,199	13,359	13,359	13,359	8,033
5,568	15,199	13,359	13,359	13,359	8,032
5,657	15,199	13,359	13,359	13,359	8,031
5,745	15,199	13,359	13,359	13,359	8,030
5,831	15,199	13,359	13,359	13,359	8,029
5,916	15,199	13,359	13,359	13,359	8,029
6,000	15,199	13,359	13,359	13,359	8,028
6,083	19,235	13,359	13,359	15,605	8,027
6,164	19,494	13,359	13,359	15,741	8,026
6,245	19,748	13,359	13,359	15,874	8,025
6,325	20,000	13,359	13,359	15,874	8,024
6,403	20,248	3,448	7,429	16,005	8,024
6,481	20,491	3,478	7,489	16,131	8,024



## АЛГЕБРА

### Числа

#### Развитие понятия числа от натурального до действительного



## Натуральные числа

### Признаки делимости

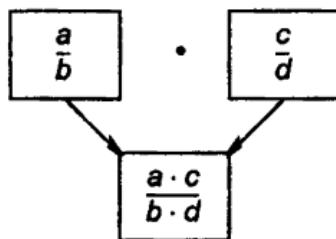
Делимость на:	Признак
2	Число оканчивается четной цифрой, т. е. 0, 2, 4, 6, 8
3	Сумма цифр записи числа делится на 3
4	Две последние цифры образуют число, делящееся на 4
5	Оканчивается на 0 или на 5
6	Делится одновременно и на 2, и на 3
8	Три последние цифры образуют число, делящееся на 8
9	Сумма цифр записи числа делится на 3
10	Оканчивается на 0

## Рациональные числа

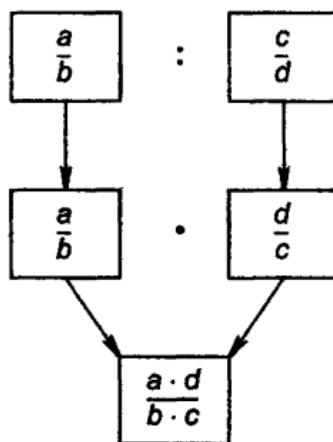
Сложение (вычитание) дробей  $\frac{m}{n}$  и  $\frac{p}{q}$

№	Отношение знаменателей	Сложение	Сумма
1	$n = q$	$\frac{m}{n} + \frac{p}{n}$	$\frac{m+p}{n}$
2	$n$ и $q$ — взаимно простые числа	$\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$	$\frac{mq+pn}{nq}$
3	$n$ кратно $q$ , т. е. $n = aq$	$\frac{m}{aq} + \frac{p}{q}$	$\frac{m+ap}{aq}$
4	$\text{НОД}(n;q) = d$ , т. е. $n = a \cdot d$ и $q = b \cdot d$	$\frac{m}{ad} + \frac{p}{bd}$	$\frac{mb+ap}{abd}$

## Умножение дробей



## Деление дробей



## Пропорции

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$     a, d — крайние члены  
 $b, c$  — средние члены

## **Свойства пропорции:**

1.  $a \cdot d = b \cdot c$
  2. ( $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ), T. e.  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ;
  3.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , T. e.  $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

## Модуль

### Определение

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

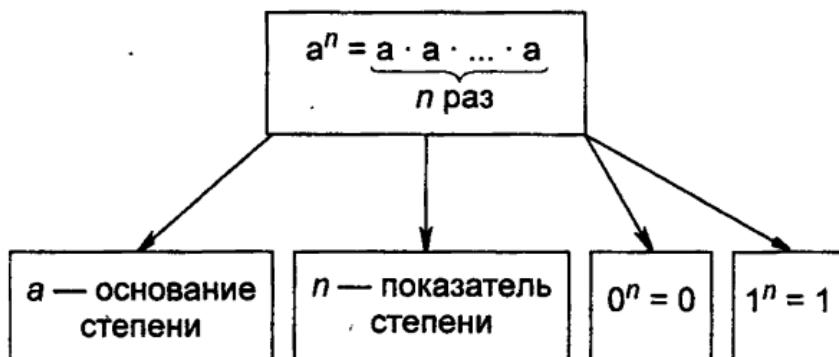
### Свойства

- 1)  $|a| = |-a|$
- 2)  $|a| \geq a; |a| \geq -a$
- 3)  $|a + b| \leq |a| + |b|$
- 4)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$
- 5)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 6)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$

## Формулы сокращенного умножения многочленов

1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
4	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7	$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

## Степень с натуральным показателем



## Свойства степени с натуральным показателем

№	Свойство	Пример
1	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^2 \cdot a^3 = a^5$
2	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^5 : a^3 = a^2$
3	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a^4)^3 = a^{12}$
4	$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$

## Корень $n$ -й степени

### Арифметический корень $n$ -й степени

Корень  $n$ -й степени из  $a$  равен  $b$ :  
 $b^n = a$

Арифметический корень  
 $n$ -й степени

$$\sqrt[n]{a} = b, \quad \begin{aligned} 1) \quad & b \geq 0 \\ 2) \quad & b^n = a \end{aligned}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Арифметический квадратный корень  
 $\sqrt{a} = b \quad 1) \quad b \geq 0$   
 $2) \quad b^2 = a$

$a$  —  
подкоренное  
выражение

$n$  —  
показатель  
корня

## Свойства арифметических корней

№	Свойство, $a \geq 0, b \geq 0$
1	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
3	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
4	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
5	$n \cdot m \sqrt[m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k}$

## Степень с действительным показателем

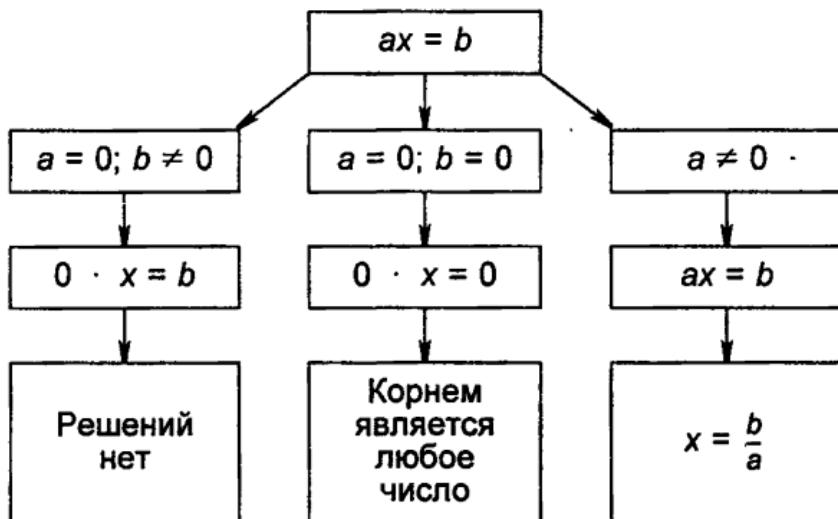


## Уравнения с одной переменной

Степень	Название уравнения	Общий вид
1	Линейное	$ax = b$
2	Квадратное	$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
3	Кубическое	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$

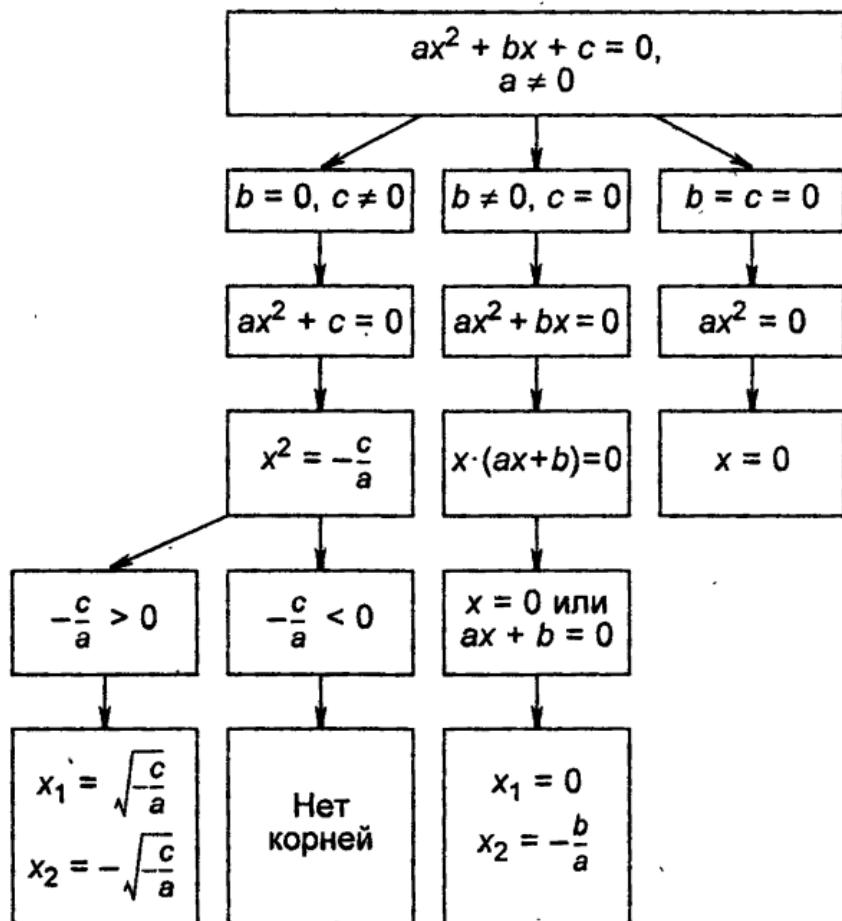
$x$  — переменная;  $a, b, c, d$  — некоторые числа.

### Решение линейного уравнения

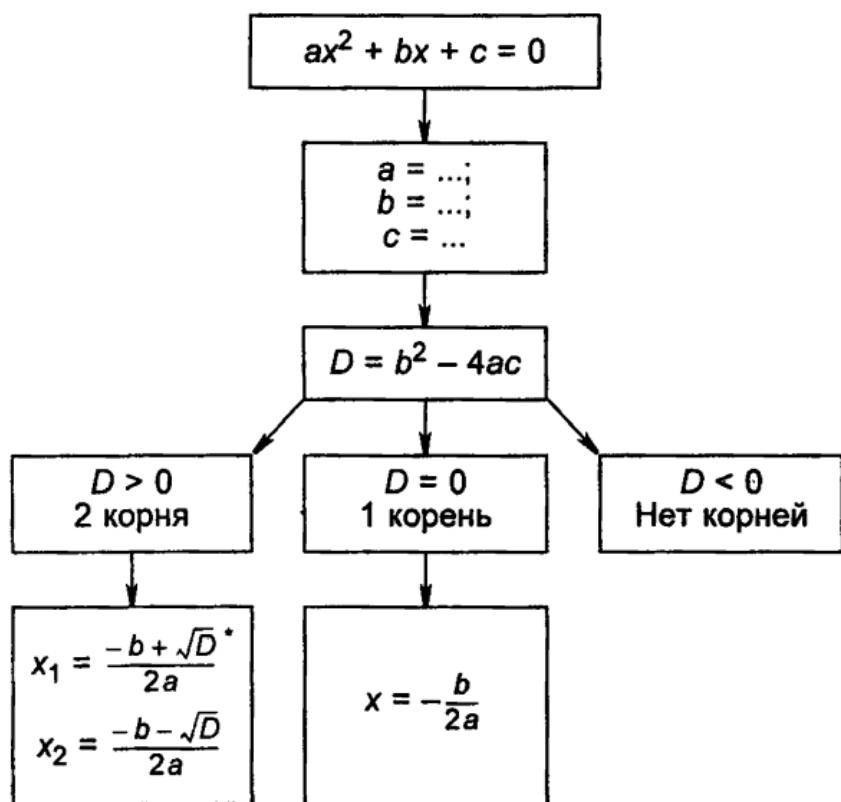


## Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

### 1. Решение неполного квадратного уравнения

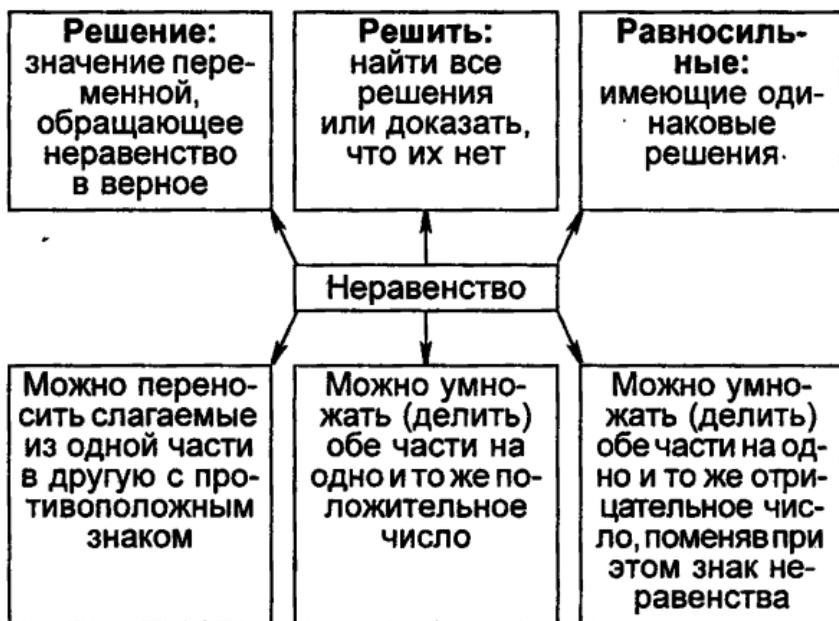


2. Решение квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  по формуле



\* Запись корней  $x_1$  и  $x_2$  в случае, когда  $D > 0$ , объединяют и записывают так:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ .

## Неравенства

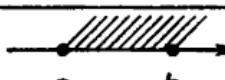
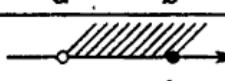
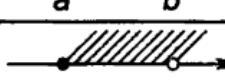
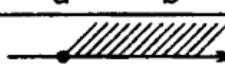
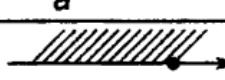


Название неравенства	Общий вид
Линейное	1) $ax > b$ , 2) $ax \geq b$ , 3) $ax < b$ , 4) $ax \leq b$
Квадратичное	1) $ax^2 + bx + c > 0$ , 2) $ax^2 + bx + c \geq 0$ , 3) $ax^2 + bx + c < 0$ , 4) $ax^2 + bx + c \leq 0$

### Свойства числовых неравенств

№	Условие	Заключение
1	$a > b$	$b < a$
2	$a > b$ и $b > c$	$a > c$
3	$a > b$ , $c$ — любое число	$a + c > b + c$
4	$a > b$ и $c > 0$	$ac > bc$
5	$a > b$ и $c < 0$	$ac < bc$
6	$a > b$ и $c > d$	$a + c > b + d$
7	$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0,$ $a > b$ и $c > d$	$ac > bd$
8	$a > b > 0, n$ — натуральное число	$a^n > b^n$
9	$a > 0, b > 0, a > b$	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

### Числовые промежутки

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leq b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leq x < b$
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geq a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leq b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

### Решение линейного неравенства

Вид неравенства	$a$	Решение	Ответ
$ax + b > 0$	$a > 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$ax + b > 0$	$a < 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a})$
$ax + b \geq 0$	$a > 0$	$x \geq -\frac{b}{a}$	$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$ax + b \geq 0$	$a < 0$	$x \leq -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a}]$
$ax + b < 0$	$a > 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a})$
$ax + b < 0$	$a < 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$ax + b \leq 0$	$a > 0$	$x \leq -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a}]$
$ax + b \leq 0$	$a < 0$	$x \geq -\frac{b}{a}$	$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$

## Решение неравенств методом интервалов

$f(x) > 0; f(x) \geq 0$   
 $f(x) < 0; f(x) \leq 0$

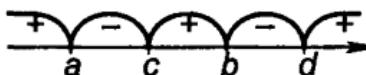
Пример

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$$

Находим нули  
функции, т. е. точки,  
в которых  
 $f(x) = 0; x = a; x = b$

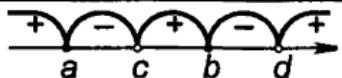
Находим точки,  
в которых функция  $f(x)$   
не определена;  
 $x \neq c; x \neq d$

Находим промежутки знакопостоянства, например



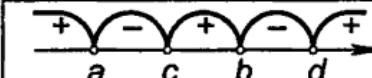
$$f(x) \geq 0; f(x) \leq 0$$

$$f(x) > 0; f(x) < 0$$



$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) \leq 0$$



$$f(x) > 0$$

$$f(x) < 0$$

Ответ:  
 $(-\infty; a] \cup$   
 $\cup (c; b] \cup$   
 $\cup (d; \infty)$

Ответ:  
 $[a; c) \cup [b; d)$

Ответ:  
 $(-\infty; a) \cup$   
 $\cup (c; b) \cup$   
 $\cup (d; \infty)$

Ответ:  
 $(a; c) \cup (b; d)$

### Решение системы линейных неравенств с одной переменной вида

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}, \text{ где } -\frac{b}{a} > -\frac{d}{c} \quad (a > 0; c > 0)$$

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$(-\frac{b}{a}; \infty)$
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$(-\frac{b}{a}; \infty)$
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$[-\frac{b}{a}; \infty)$

См. продолжение

Продолжение

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$[-\frac{b}{a}; \infty)$
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$(-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a})$
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$[-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a})$
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		$(-\infty; -\frac{d}{c})$

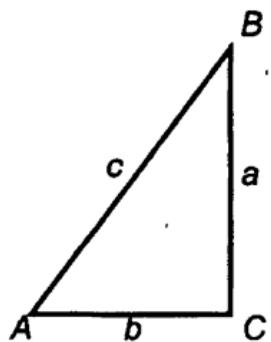
См. продолжение

Продолжение

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		$(-\infty; -\frac{d}{c}]$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$(-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}]$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$[-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}]$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		$(-\infty; -\frac{d}{c})$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		$(-\infty; -\frac{d}{c}]$

Характеристики	Последовательность	
	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом $d$ (разность прогрессии) $a_{n+1} = a_n + d$	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и тоже число $q$ (знаменатель прогрессии) $b_{n+1} = b_n \cdot q$
Формула $n$ -го члена	$a_n = a_1 + d(n - 1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формула суммы $n$ первых членов (через первый член и $n$ -й)	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q - 1}$
Формула суммы $n$ первых членов (через первый член и разность или знаменатель)	$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$
Характеристическое свойство	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
Сумма бесконечной геометрической прогрессии	—	$S = \frac{b_1}{1 - q},  q  < 1$

## Тригонометрические функции острого угла



Функция	Угол	
	A	B
sin (синус)	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$
cos (косинус)	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$
tg (тангенс)	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
ctg (котангенс)	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$
sec (секанс)	$\frac{c}{b}$	$\frac{c}{a}$
cosec (косеканс)	$\frac{c}{a}$	$\frac{c}{b}$

**Сравнительная таблица градусной  
и радианной мер некоторых углов**

Углы в градусах	Углы в радианах	Углы в градусах	Углы в радианах
$0^\circ$	0	$180^\circ$	$\pi$
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$210^\circ$	$\frac{7\pi}{6}$
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$225^\circ$	$\frac{5\pi}{4}$
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3}$	$240^\circ$	$\frac{4\pi}{3}$
$90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$270^\circ$	$\frac{3\pi}{2}$
$120^\circ$	$\frac{2\pi}{3}$	$300^\circ$	$\frac{5\pi}{3}$
$135^\circ$	$\frac{3\pi}{4}$	$315^\circ$	$\frac{7\pi}{4}$
$150^\circ$	$\frac{5\pi}{6}$	$330^\circ$	$\frac{11\pi}{6}$
		$360^\circ$	$2\pi$

## Значения тригонометрических функций некоторых углов

22

Аргу- мент Функ- ция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
$\sec \alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	-	-2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-

См. продолжение

Аргу- мент $\alpha$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
$\sec \alpha$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\operatorname{cosec} \alpha$	-	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	-

## Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

## Формулы сложения и вычитания

Функ- ция	Аргумент	
	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
$\sin$	$\sin \alpha \cdot \cos \beta +$ $+ \cos \alpha \cdot \sin \beta$	$\sin \alpha \cdot \cos \beta -$ $- \cos \alpha \cdot \sin \beta$
$\cos$	$\cos \alpha \cdot \cos \beta -$ $- \sin \alpha \cdot \sin \beta$	$\cos \alpha \cdot \cos \beta +$ $+ \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$\operatorname{tg}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
$\operatorname{ctg}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$
$\sec$	$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$	$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{cosec}$	$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$	$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$

**Формулы половинных, двойных  
и тройных углов (также  $\sin 4\alpha$ ;  $\cos 4\alpha$ )**

	$\frac{\alpha}{2}$	$2\alpha$	$3\alpha$	$4\alpha$
$\sin$	$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$2 \sin \alpha \times \cos \alpha$	$3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	$4 \cos^3 \alpha \times \sin \alpha - 4 \cos \alpha \times \sin^3 \alpha$
$\cos$	$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$	$\cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \times \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$
$\tg$	$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$	$\frac{2 \tg \alpha}{1 - \tg^2 \alpha}$	$\frac{3 \tg \alpha - \tg^3 \alpha}{1 - 3 \tg^2 \alpha}$	-
$\ctg$	$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$	$\frac{\ctg^2 \alpha - 1}{2 \ctg \alpha}$	$\frac{\ctg^3 \alpha - 3 \ctg \alpha}{3 \ctg^2 \alpha - 1}$	-

**Формулы суммы и разности  
тригонометрических функций**

$\sin \alpha + \sin \beta$	$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha - \sin \beta$	$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \cos \beta$	$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha - \cos \beta$	$-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \sin \alpha$	$\sqrt{2} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$
$\cos \alpha - \sin \alpha$	$\sqrt{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$
$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta$	$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$
$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta$	$\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$	$\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$

*См. продолжение*

Продолжение

$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta$	$-\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$	$2 \operatorname{cosec} 2\alpha$
$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$	$-2 \operatorname{ctg} 2\alpha$

### Обратные тригонометрические функции

Функция	Обратная функция	$\alpha$	$\sin \alpha$
$\sin$	$\arcsin a = \alpha$	$\alpha \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$	$\sin \alpha = a$
$\cos$	$\arccos a = \alpha$	$\alpha \in [0; \pi]$	$\cos \alpha = a$
$\operatorname{tg}$	$\operatorname{arctg} a = \alpha$	$\alpha \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$	$\operatorname{tg} \alpha = a$
$\operatorname{ctg}$	$\operatorname{arcctg} a = \alpha$	$\alpha \in (0; \pi)$	$\operatorname{ctg} \alpha = a$

## Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	$a$	Формулы решений	Частные случаи
$\sin x = a$	$ a  > 1$	Нет решений	—
	$ a  \leq 1$	$x = (-1)^k \times$ $x = \arcsin a + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\sin x = 0;$ $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$ a  > 1$	Нет решений	—
	$ a  \leq 1$	$x = \pm \arccos a +$ $+ 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = 0;$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$a$ — любое число	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	—
	$a$ — любое число	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	—

**Решение простейших тригонометрических  
уравнений вида  $\sin x = a$ ;  $\cos x = a$**

$a$	$\sin x = a$	$\cos x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = 2\pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi n$
$\frac{1}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$
$-\frac{1}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

$k, n \in \mathbb{Z}$

**Решение простейших тригонометрических  
уравнений вида  $\operatorname{tg} x = a$ ;  $\operatorname{ctg} x = a$**

$a$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$
$\sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$
$-\sqrt{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$

$k, n \in \mathbb{Z}$

### Связь показательной и логарифмической функций

Функция	$x$	$y$
$y = a^x$	Показатель степени	Степень
$y = \log_a x$ ( $x = a^y$ )	Степень	Показатель степени

### Правила логарифмирования и потенцирования

№	Правила логарифмирования	Правила потенцирования
1	$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$	$\log_a N_1 + \log_a N_2 = \log_a(N_1 \cdot N_2)$
2	$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$	$\log_a N_1 - \log_a N_2 = \log_a \frac{N_1}{N_2}$
3	$\log_a N^k = k \cdot \log_a N$	$k \cdot \log_a N = \log_a N^k$
4	$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k} \cdot \log_a N$	$\frac{1}{k} \cdot \log_a N = \log_a \sqrt[k]{N}$

## Производная $f'(x)$

**Определение.**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ где } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

**Геометрический смысл.**

$y = kx + b$  — касательная к графику функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .  $f'(x_0) = k$

**Физический смысл.**

1)  $S'(t) = v(t)$ ;  $v'(t) = a(t)$ .  $S$  — расстояние,  $v$  — скорость,  $a$  — ускорение,  $t$  — время. 2) Мощность есть производная работы по времени

**Правила вычисления производных.**

$$1) (u + v)' = u' + v'. 2) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. 3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \text{ где } v \neq 0$$

**Производная сложной функции.**

$$h(x) = g(f(x)) \quad h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

**Возрастание и убывание функции.**

Если  $f'(x) > 0$  на  $J$ , то  $f(x)$  возрастает на  $J$ .

Если  $f'(x) < 0$  на  $J$ , то  $f(x)$  убывает на  $J$

**Точки максимума и минимума.**

Если  $x_0$  — точки экстремума, то  $f'(x_0) = 0$

1) Если в точке  $x_0$   $f'(x)$  меняет знак с «+» на «-», то  $x_0$  — точка максимума. 2) Если в точке  $x_0$   $f'(x)$  меняет знак с «-» на «+», то  $x_0$  — точка минимума

Таблица производных

№	$f(x)$	$f'(x)$
1	$C$ — постоянная	0
2	$kx + b$	$k$
3	$x^r$	$r \cdot x^{r-1}$
4	$\mu^x$	$\mu^x$
5	$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
6	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

См. продолжение

Продолжение

№	$f(x)$	$f'(x)$
8	$\sin x$	$\cos x$
9	$\cos x$	$-\sin x$
10	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
11	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
12	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
15	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Графики функций  $F(x) + C$  получаются из графика  $y = F(x)$  сдвигом вдоль оси  $Oy$

**Основное свойство.**  
Если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$  на промежутке  $J$ , то общий вид всех первообразных для  $f(x)$ :  $F(x) + C$ , где  $C = \text{const}$

**Определение.**  $F(x)$  называется первообразной для  $f(x)$  на промежутке  $J$ , если  $F'(x) = f(x)$  для любого  $x \in J$

### Первообразная

#### Формула Ньютона—Лейбница

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$   
где  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx &= \\ &= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \end{aligned}$$

1. Если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ , а  $H(x)$  — первообразная для  $h(x)$ , то  $F(x) + H(x)$  — первообразная для  $f(x) + h(x)$ .

2. Если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$  и  $k$  — постоянная, то  $kF(x)$  — первообразная для  $k \cdot f(x)$ .

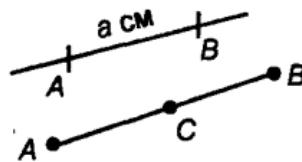
3. Если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ , и  $b$  — постоянные, где  $k \neq 0$ ,  
 $\frac{1}{k} F(kx + b)$  — первообразная для  $f(kx + b)$

Таблица первообразных

№	Функция	Первообразная
1	$f(x) = k$	$F(x) = kx$
2	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $
4	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
5	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
7	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
11	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$

## ГЕОМЕТРИЯ

### Отрезок

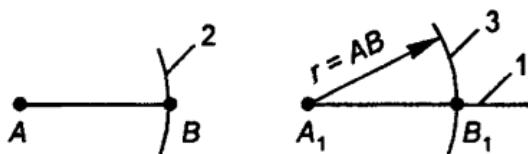


$$\begin{aligned}AB &= a \text{ см} \\ AC + CB &= AB\end{aligned}$$

Дано: отрезок  $AB$

Построить:  $A_1B_1$ ,  $A_1B_1 = AB$

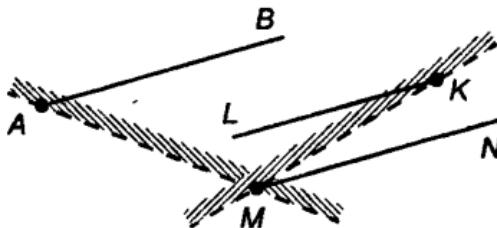
Построение



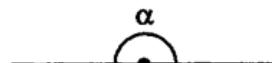
### Луч

Сонаправленные лучи —  $AB$  и  $MN$

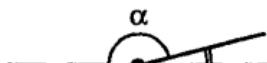
Противоположно направленные лучи —  $MN$  и  $KL$



## Угол



Развернутый



Прямой



Острый



Тупой



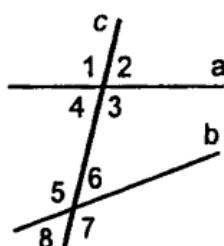
Смежные



Вертикальные



$$\angle \alpha = \angle \beta$$



С — секущая

Внутренние накрест лежащие углы — 3 и 5, 4 и 6

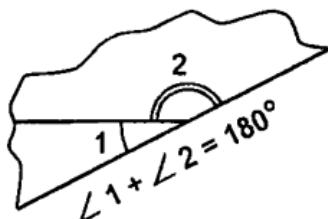
Односторонние (прилежащие) углы — 4 и 5, 3 и 6

Соответственные углы — 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7

Внешние накрест лежащие углы — 1 и 7, 2 и 8

## Свойства смежных и вертикальных углов

### Теорема о смежных углах



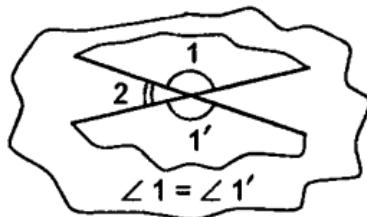
Доказательство:

Так как  $\angle 1 + \angle 2$  — развернутый угол, то  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

### Теорема о вертикальных углах

Доказательство:

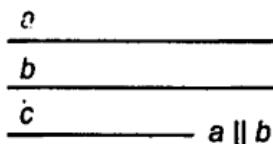
$$\begin{aligned} \angle 1 + \angle 2 &= 180^\circ \\ \angle 1' + \angle 2 &= 180^\circ \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \angle 1 = \angle 1'$$



## Параллельные прямые

Определение

$a$  и  $b$  не пересекаются  
 $a \parallel b, b \parallel c \rightarrow a \parallel c$



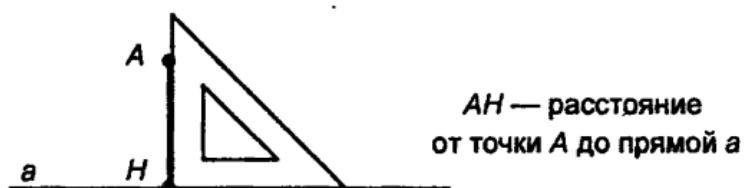
**Признаки параллельности прямых  
(прямые и обратные теоремы)**

№ п/п	Признак (прямая теорема)	Рисунок	Свойство (обратная теорема)
1	<p>Если <math>\angle 1 = \angle 2</math>, то <math>a \parallel b</math></p> <p>Следствие: Если <math>a \perp c</math> и <math>b \perp c</math>, то <math>a \parallel b</math></p>		<p>Если <math>a \parallel b</math>, то <math>\angle 1 = \angle 2</math></p> <p>Следствие: Если <math>a \parallel b</math> и <math>c \perp a</math>, то <math>c \perp b</math></p>
2	<p>Если <math>\angle 1 = \angle 2</math>, то <math>a \parallel b</math></p>		<p>Если <math>a \parallel b</math>, то <math>\angle 1 = \angle 2</math></p>
3	<p>Если <math>\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ</math>, то <math>a \parallel b</math></p>		<p>Если <math>a \parallel b</math>, то <math>\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ</math></p>

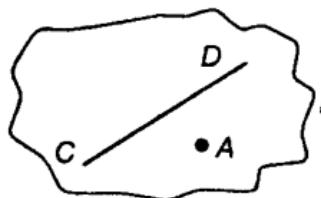
## Перпендикулярные прямые

Определения

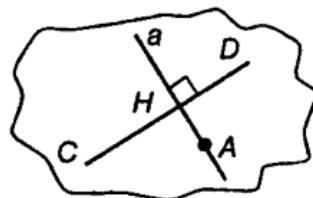
$AB \perp CD: \angle AOD = \angle AOC = \angle COB = \angle DOB = 90^\circ$



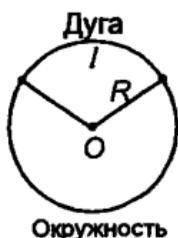
Свойство



Существует единственная прямая  $a$



## Окружность, круг



$$C = 2\pi R = \pi d,$$

где  $\pi \approx 3,14$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$$

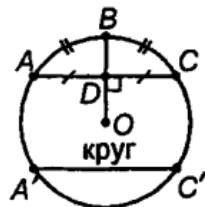
$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

### Круговой сектор

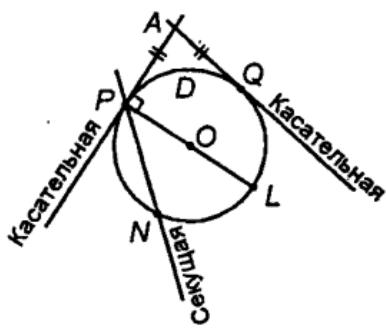


$\alpha$  — радианная мера дуги  
 $a$  — градусная мера дуги

$$l = \frac{\pi Ra}{180^\circ} = R\alpha$$



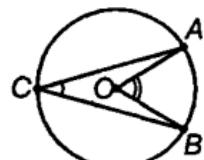
$$\begin{aligned}AC &= A'C' \\ \cup AC &= \cup A'C' \\ AD &= DC \\ \cup AB &= \cup BC\end{aligned}$$



$$AP = AQ$$

$\angle PAQ$  — описанный

$$\angle PAQ = \frac{1}{2} (\cup PLQ - \cup PDQ)$$

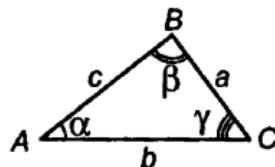


$\angle AOB$  — центральный  
 $\angle ACB$  — вписанный  
 $\angle AOB = \alpha^\circ; \cup AB = \alpha^\circ$

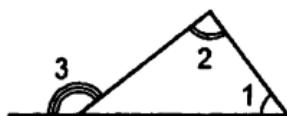
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

$1^\circ = \frac{1}{360}$  часть всей окружности

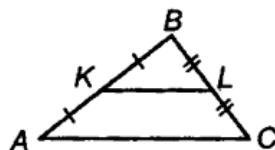
## Треугольник Общие сведения



Три стороны, три угла —  
элементы треугольника  
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

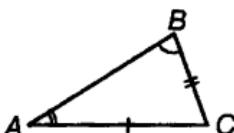


$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$$

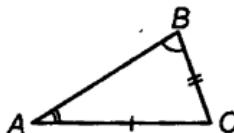


$$KL \parallel AC, KL = \frac{1}{2} AC$$

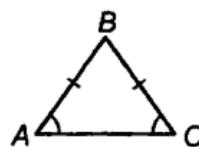
### Теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольников



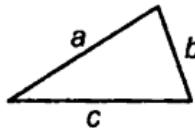
Если  $AC > BC$ , то  $\angle B > \angle A$



Если  $\angle B > \angle A$ , то  $AC > BC$



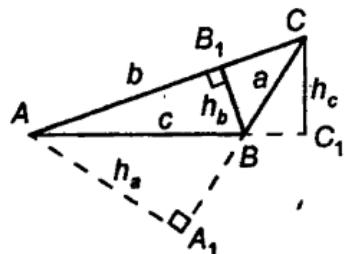
Если  $\angle A = \angle C$ ,  
то  $BC = BA$



$$\begin{aligned} a &< b + c \\ b &< a + c \\ c &< b + a \end{aligned}$$

## Высота, медиана, биссектриса

Высота  $h$ :

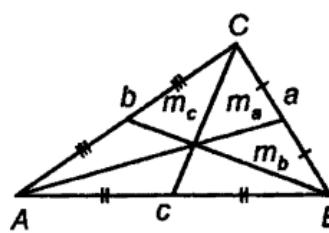


$$h_a = \frac{2S_{\text{треуг}}}{a}, \text{ где } S_{\text{треуг}} -$$

площадь  $\Delta ABC$

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \\ = bc : ac : ab$$

Медиана  $m$ :



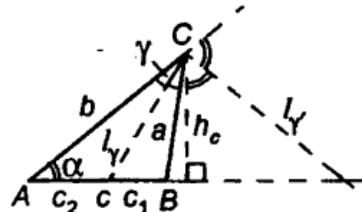
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Биссектриса  $l$ :



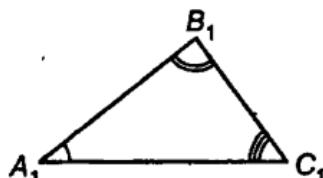
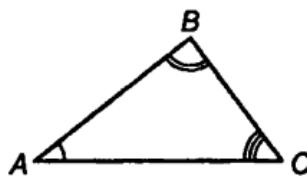
$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{b}{a}$$

$$l_\alpha = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p(p-a)}$$

$$l_\gamma = \frac{2}{|b-c|} \times \sqrt{bc(p-c)(p-b)},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}, \angle(h_c; l_\gamma) = \frac{\beta - \alpha}{2}, \angle(h_c; l_\alpha) = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}$$

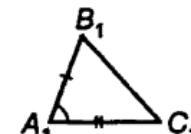
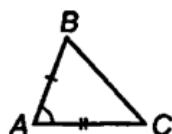
### Равенство треугольников



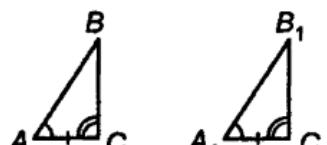
$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

Первый признак  
равенства треугольников

Второй признак  
равенства треугольников

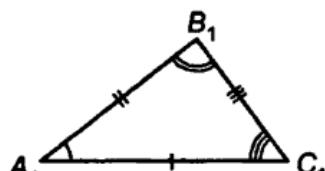
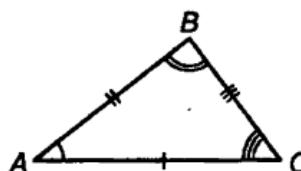


$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$



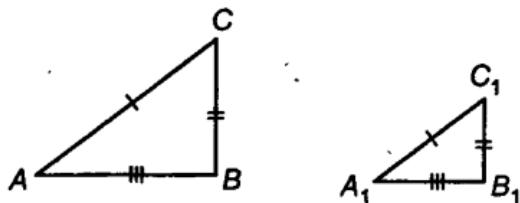
$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

Третий признак равенства треугольников



$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

### Подобие треугольников



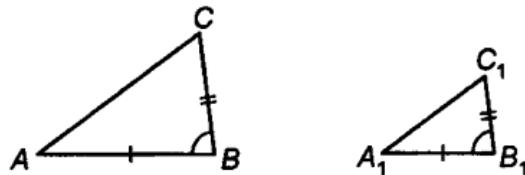
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$$

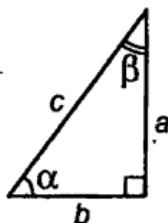
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \angle B = \angle B_1$$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

## Основные тригонометрические соотношения



Синус:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

Косинус:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

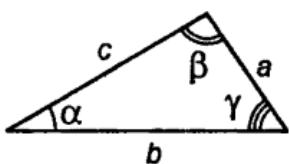
$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

## Теорема косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

## Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности

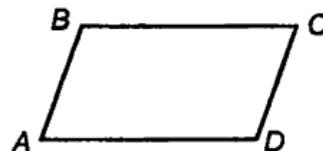
### Теорема тангенсов

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

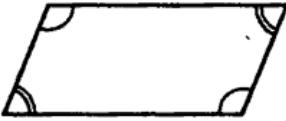
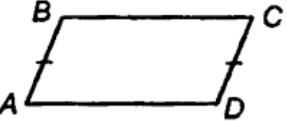
$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}};$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}$$

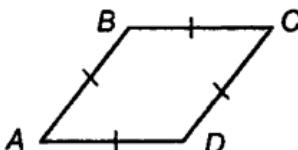
### Параллелограмм



$AB \parallel CD, BC \parallel AD.$

Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
<p>1. В параллелограмме противоположные углы равны</p> 	<p>1. Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник параллелограмм</p>  <p>Если <math>AB = CD</math> и <math>AB \parallel CD</math>, то <math>ABCD</math> — параллелограмм</p>
<p>2. В параллелограмме противоположные стороны равны</p> 	<p>2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм</p>
<p>3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам</p> 	<p>3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм</p>

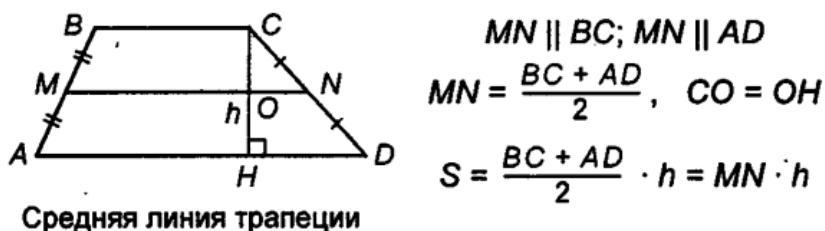
## Ромб



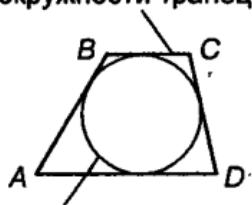
$ABCD$  — ромб  
 $AB \parallel CD, BC \parallel AD$   
 $AB = CD = BC = AD$

Свойства ромба	Признаки ромба
1. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом	1. Если диагонали параллелограмма пересекаются под прямым углом, то этот параллелограмм — ромб
2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов	
Все свойства параллелограмма верны для ромба	

## Трапеция

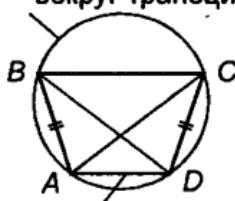


Описанная около окружности трапеция



Вписанная окружность

Окружность, описанная вокруг трапеции



Вписанная равнобедренная трапеция

$$AC \cdot BD = AC \cdot CD + AD \cdot CB$$

$$\angle A + \angle C = 180^\circ; \angle B + \angle D = 180^\circ$$

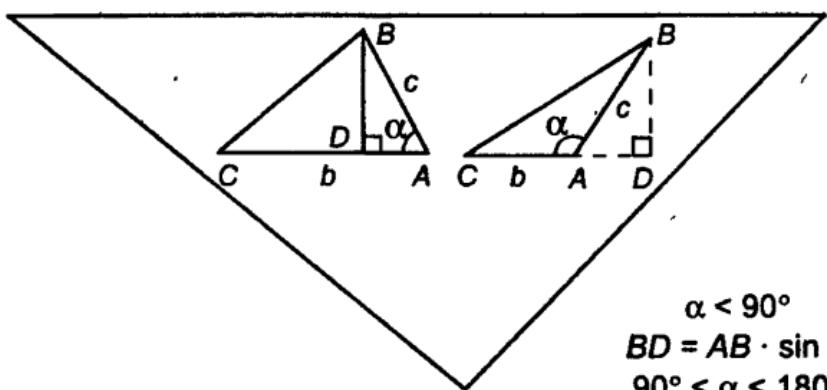
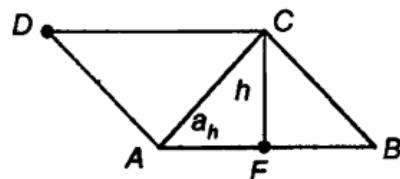
## Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC}$$

$$S_{ABCD} = a_h \cdot h$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$



$$\alpha < 90^\circ$$

$$BD = AB \cdot \sin \alpha$$
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

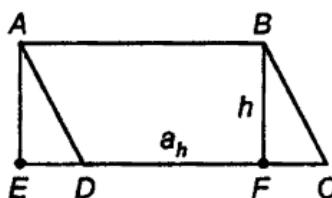
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} b c \sin \angle b, c$$

$$BD = AB \cdot \sin (180^\circ - \alpha) = AB \cdot \sin \alpha$$

$$h = c \cdot \sin \angle b, c$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} b_h \cdot h \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2} b c \sin \angle b, c$$

## Площадь параллелограмма



$$S = a_h \cdot h$$

Если  $ABCD$  — прямоугольник, то  $S_{ABCD} = a_h \cdot h$

Если  $ABCD$  — не прямоугольник, то пусть  $\angle DAB < 90^\circ$

$$S_{ABCE} = S_{\Delta AED} + S_{ABCD}$$

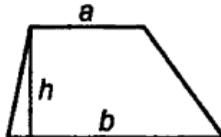
$$S_{ABCE} = S_{ABFE} + S_{\Delta BFC}$$

$$S_{\Delta AED} = S_{\Delta BFC}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABFE}$$

$$S_{ABCD} = a_h \cdot h$$

## Площадь трапеции



$$\text{Теорема: } S_{\text{трап}} = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Доказательство:

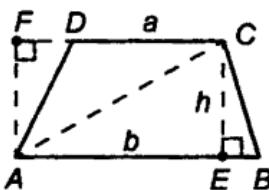
$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}, \text{ поскольку}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CE$$

$$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot AF,$$

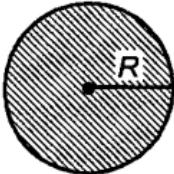
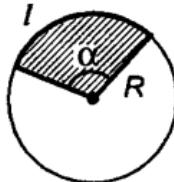
$$\text{то } S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB \cdot CE + DC \cdot AF) =$$

$$= \frac{1}{2} h(AB + DC)$$



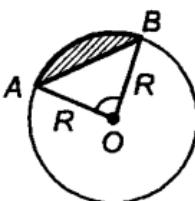
$$S_{ABCD} = \frac{a + b}{2} h$$

## Площади круга, сектора, сегмента

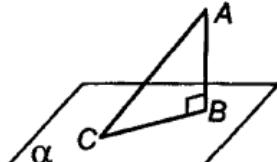
Формула, рисунок	Примеры
 $S_{\text{круг}} = \pi R^2$ $S_{\text{круг}} = \frac{\pi d^2}{4}$	$R = 2 \text{ см}$ $S \approx 3,14 \cdot 2^2 = 12,56 (\text{см}^2)$ $d = 4 \text{ см}$ $S \approx 3,14 \cdot \frac{4^2}{4} = 12,56 (\text{см}^2)$
 $S_{\text{сектор}} = \frac{Rl}{2} =$ $= R^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi R^2 a}{360^\circ}$	$R = 2 \text{ см}; l = 3 \text{ см};$ $S = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 (\text{см}^2)$ $R = 4 \text{ см}; \alpha = 2 \text{ рад};$ $S = \frac{4^2 \cdot 2}{2} = 16 (\text{см}^2)$ $R = 3 \text{ см}; \alpha = 120^\circ;$ $S = \frac{3,14 \cdot 3^2 \cdot 120}{360} = 9,42 (\text{см}^2)$

См. продолжение

Продолжение

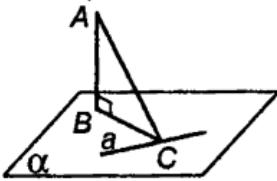
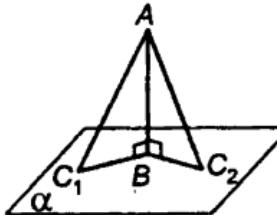
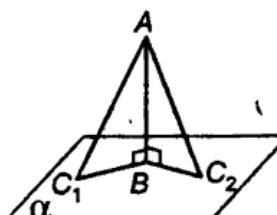
Формула, рисунок	Примеры
 $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\Delta AOB}$ $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} R^2(\alpha - \sin \alpha)$	$R = 2 \text{ см}; \angle AOB = 60^\circ$ $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 60}{360} = \frac{2\pi}{3} (\text{см}^2)$ $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin 60^\circ = \sqrt{3} (\text{см}^2)$ $S_{\text{сегм}} = \left( \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \text{ см}^2$ $R = 2 \text{ см}; \angle AOB = \frac{\pi}{3}$ $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left( \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) =$ $= 2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left( \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \text{ см}^2$

### Наклонная в пространстве

	$AB \perp \alpha; AC$ — наклонная; $C$ — основание наклонной; $CB$ — проекция наклонной	$AC > AB$
--	---	-----------

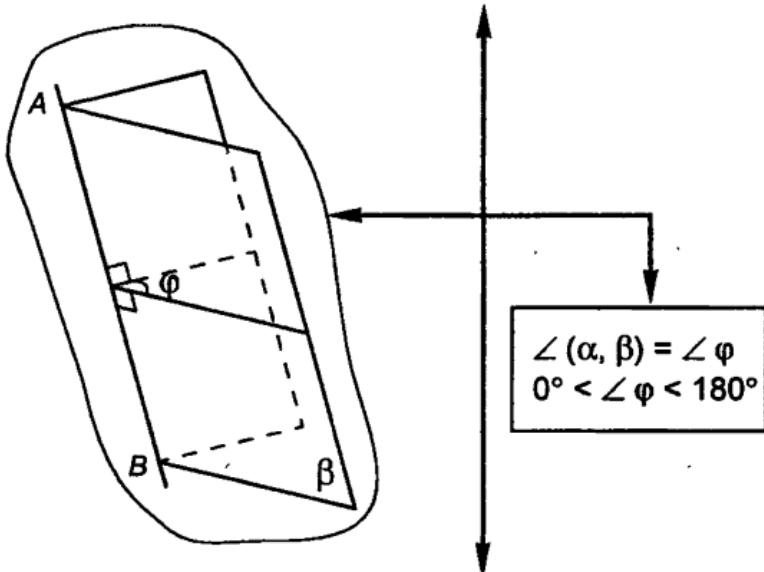
См. продолжение

Продолжение

 <p><math>AB \perp \alpha</math>;  <math>AC</math> — наклонная;  <math>C</math> — основание наклонной;  <math>BC</math> — проекция;  <math>a \subset \alpha</math></p>	<p>Теорема о трех перпендикулярах:  «Если <math>a \perp BC</math>,  следовательно,  <math>a \perp AC</math>.  Если <math>a \perp AC</math>,  следовательно,  <math>a \perp BC</math>»</p>
 <p><math>AB \perp \alpha</math>;  <math>AC_1, AC_2</math> — наклонные;  <math>BC_1, BC_2</math> — проекции наклонных.</p>	<p>Если <math>AC_1 = AC_2</math>,  то <math>BC_1 = BC_2</math>.  Если <math>BC_1 = BC_2</math>,  то <math>AC_1 = AC_2</math></p>
 <p><math>AB \perp \alpha</math>;  <math>AC_1, AC_2</math> — наклонные;  <math>BC_1, BC_2</math> — проекции наклонных</p>	<p>Если <math>AC_1 &gt; AC_2</math>,  то <math>BC_1 &gt; BC_2</math>.  Если <math>BC_1 &gt; BC_2</math>,  то <math>AC_1 &gt; AC_2</math></p>

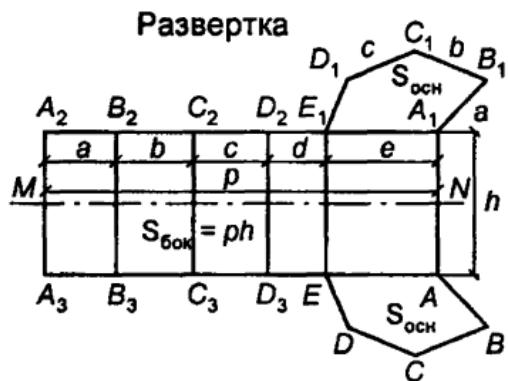
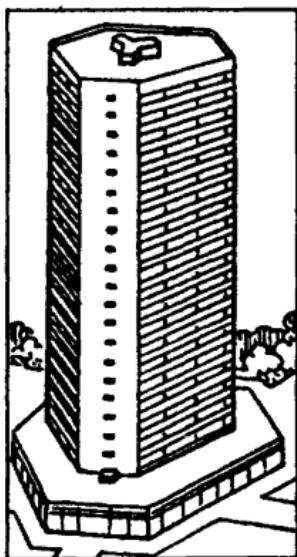
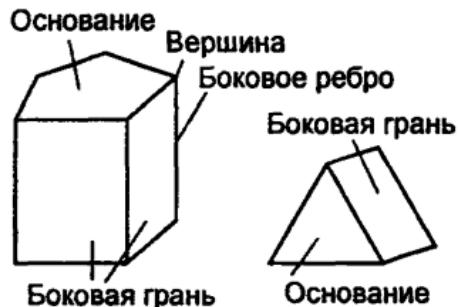
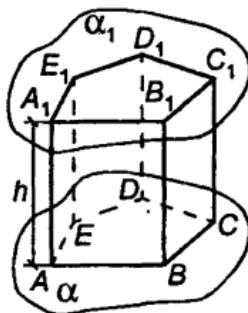
## Двугранный угол

Двугранный угол с ребром  $AB$  и гранями  $\alpha$  и  $\beta$ ;  
плоскость  $\varphi$  пересекает ребро  $AB$  под прямым  
углом, а плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  вырезают на ней  
линейный угол  $\varphi$  данного двугранного угла



Фигура, образованная полуплоскостями, не  
принадлежащими одной плоскости, с общей  
ограничивающей прямой

## Прямая призма

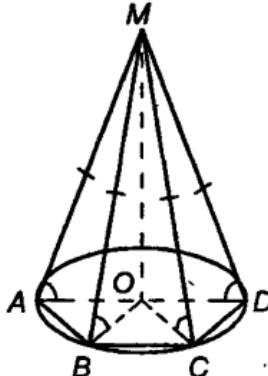
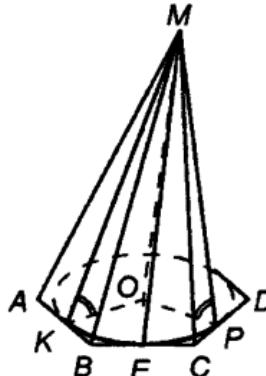


Площадь поверхности

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$\text{Объем } V_{\text{пр}} = Sh$$

## Пирамиды

Изображение	Основные соотношения
	<p>Если <math>MA = MB = MC = \dots</math>, то <math>MO \perp ABC</math>.</p> <p>Если <math>\angle MAO = \angle MBO = \angle MDO = \angle MCO = \dots</math>, то <math>O</math> — центр описанной окружности</p>
	<p>Если <math>\angle MKO = \angle MEO = \angle MPO = \dots</math>, то <math>O</math> — центр вписанной окружности</p>

## Усеченная пирамида

### Построение

—  $OABCD$  — пирамида ( $ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$ ):

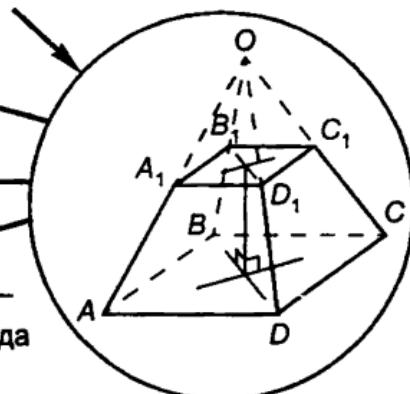
—  $OA_1B_1C_1D_1$  — пирамида

$ABCDA_1B_1C_1D_1$  — усеченная пирамида

$$H_o^k(ABCD) = A_1B_1C_1D_1$$

Боковые грани —  
трапеции

Если  $OABCD$  — правильная  
пирамида, то  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  —  
правильная усеченная пирамида



—  $S_{\text{полн. пов.}} : S_{\text{осн.}_1} + S_{\text{осн.}_2} + S_{\text{бок}}$

—  $S_{\text{бок. пов.}} = \frac{1}{2}(P + p)h$ , где  $P, p$  — периметры оснований

—  $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$

—  $S_1 = S_{ABCD}, S_2 = S_{A_1B_1C_1D_1}$

— В правильной усеченной пирамиде грани — равные  
равнобедренные трапеции

Высота трапеции боковой грани — апофема  
правильной усеченной пирамиды ( $h$ )

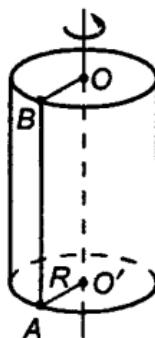
## Цилиндр

Цилиндр, получаемый вращением прямоугольника  $O O' A B$  вокруг прямой, содержащей сторону  $O O'$ , перпендикулярные стороны  $O' A$  и  $O B$  описывают основания цилиндра, а отрезок  $A B$ ,

параллельный  $O O'$ , — боковую поверхность его.

$R$  — радиус основания цилиндра,  $h$  — его высота, равная образующей

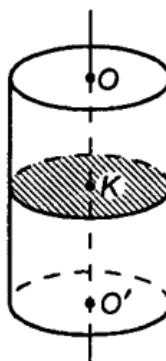
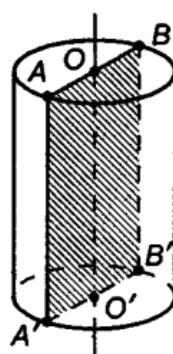
Прямоугольник  $A A' B' B$  — осевое сечение цилиндра с осью  $O O'$



$$S_{бок} = 2\pi Rh$$

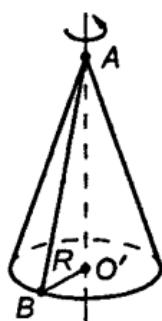
$$S_{осн} = \pi R^2$$

$$V = \pi R^2 h$$

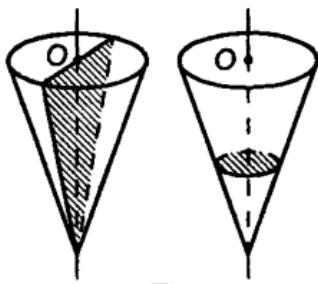


Круг  $K$  — поперечное сечение цилиндра с осью  $O O'$

## Конус



Конус, получаемый вращением прямоугольного треугольника  $AOB$  вокруг прямой, содержащей катет  $AO$ , другой катет  $OB$  описывает основание конуса, а гипотенуза  $AB$  — его боковую поверхность,  $R$  — радиус основания конуса,  $h$  — высота его,  $l$  — образующая



Осьное сечение конуса с осью  
 $O$  — равнобедренный  
треугольник

$$S_{\text{бок}} = \pi R l$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

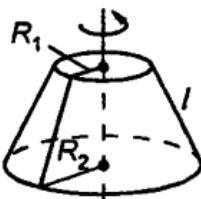
$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Усеченный конус,  
общий вид

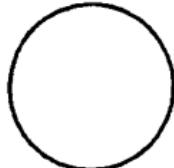
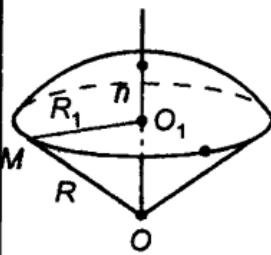
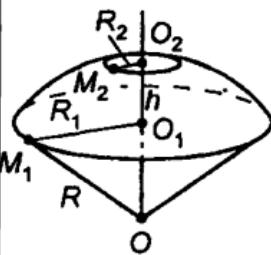
Усеченный конус,  $R_1$  и  $R_2$  —  
радиусы оснований,  
 $h$  — высота,  $l$  — отрезок обра-  
зующей,  $O$  — ось

$$S_{\text{бок}} = \pi l (R_1 + R_2)$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$

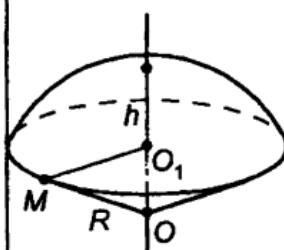


**Объемы и площади  
поверхностей шара и его частей**

	$S_{\text{пов шара}} = 4\pi R^2$ $V_{\text{шара}} = \frac{4\pi R^3}{3}$
	$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(R_1^2 + h^2)$ $S = \pi(2Rh + R_1^2) = \pi(h^2 + 2R_1^2)$ $R_1 = \sqrt{h(2R - h)}$ $V_{\text{сегм}} = \pi \left( R - \frac{h}{3} \right) h^2 =$ $= \frac{1}{6} \pi h (3R^2 + h^2) = \frac{1}{6} \pi h^2 (3D + 2h)$
	$h_1$ и $h_2$ — высоты удаленных сегментов так, что $2R - h_1 - h_2 = h$

См. продолжение

Продолжение



$$V_{\text{слоя}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi R(h_1^2 +$$

$$+ h_2^2) - \frac{\pi}{3}(h_1^3 + h_2^3)$$

$$V_{\text{слоя}} = \frac{1}{6}\pi h(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)$$

$$S_{\text{пояс}} = 2\pi Rh = \pi Dh$$

$$V_{\text{сект}} = \frac{2\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{6} D^2 h$$

$$S_{\text{пов. сект}} = \pi R(2h + O_1M)$$

Алгебра .....	1
Геометрия .....	37

---

В помощь учебному процессу

*Справочные материалы*

## МАТЕМАТИКА В КАРМАНЕ

Ответственный редактор *О. В. Стукалова*

Макет *И. А. Изергин*

Корректор *Л. К. Корнилова*

ISBN 5-17-009325-X (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 5-8195-0176-1 (ООО «АСТОЛ»)

Подписано в печать 09.12.2003. Формат 84x108 ¼. Гарнитура  
Гельветика Дейл Уолл печ. л. 1.68. Тираж 15000 экз. Заказ № 20

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2,  
953005 – литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№77 99.02 953 Д 908286 12.02 от 27.12.02

ООО «АСТОЛ»

129085, Москва, пр. Ольминского, д. 3а, стр. 3

ООО «Издательство АСТ»,  
667000, Республика Тыва, г. Кызыл

ул. Кочетова, д. 28

[www.ast.ru](http://www.ast.ru)

E-mail: [astpub@aha.ru](mailto:astpub@aha.ru)

**Незаменимая помощь школьникам!**

**«МАТЕМАТИКА В КАРМАНЕ»**

Весь школьный курс математики  
наглядно представлен в виде  
простых и четких таблиц и схем,  
которые облегчают нахождение  
и запоминание материала.

Эта книжка станет незаменимым  
помощником на уроках,  
а также при подготовке  
к зачетам и экзаменам.

ISBN 5-17-009325-X



9 785170 093250